

<https://eventos.utfpr.edu.br/sei/sei2018>

Análise Numérica do fenômeno de convecção natural em cavidade quadrada pelo Método de Lattice Boltzmann

Numerical analysis of natural convection in a square cavity using the Lattice Boltzmann Method

João Victor Cardoso

joacardoso@alunos.utfpr.edu.br

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

Silvio Luiz de Mello Junqueira

silvio@utfpr.edu.br

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO

O objetivo desse trabalho consiste em avaliar a aplicabilidade do método de Lattice Boltzmann (LBM) na análise de fenômenos de convecção natural em uma cavidade quadrada, por meio da comparação entre os resultados obtidos por esse método numérico e pelo que já está disponível na literatura. A metodologia desenvolvida tem como base os processos de discretização da equação de Boltzmann, juntamente à delimitação das condições de contorno existentes no problema estudado e ao processo de regularização, para então serem escritos os códigos computacionais. Nesta análise, foram estipulados os seguintes parâmetros adimensionais: os números de Rayleigh (variam de 10^3 a 10^6) e Prandtl (fixado em 0,71). Os principais resultados obtidos foram o número de Nusselt médio da cavidade, a temperatura e a linha de corrente para o ponto médio da cavidade, e a componente horizontal do vetor velocidade. Os resultados para o número de Nusselt variam de 1,129 ($Ra = 10^3$) a 8,858 ($Ra = 10^6$). Com base nos dados apresentados, pôde-se verificar a eficiência do LBM em representar os resultados desse fenômeno físico.

PALAVRAS-CHAVE: Convecção natural, LBM, Cavidade quadrada, Número de Nusselt

ABSTRACT

The objective of this paper is to evaluate the applicability of Lattice Boltzmann method to analyze the natural convection phenomena in a square cavity, through a comparison between the results obtained in this paper with the ones found in literature. The methodology is supported by the Boltzmann equation discretization, the delimitation of the problem's boundary conditions and the regularization process. For that, a computational code in LBM has been written. Non-dimensional parameters were defined for this analysis: the Rayleigh number (ranging from 10^3 to 10^6) and Prandtl number (fixed in 0.71). Results were obtained for the Nusselt number along the entire cavity, the temperature and the stream function at the middle point of the cavity, and the velocity vector horizontal component. The outputs for the Nusselt number vary from 1.129 ($Ra = 10^3$) to 8.858 ($Ra = 10^6$). According to the data here presented, the efficiency of LBM in representing the results of this physical phenomenon has been proved.

KEYWORDS: Natural convection, LBM, Square cavity, Nusselt number

Recebido: 31 ago. 2018.

Aprovado: 13 set. 2018

Direito autorial:

Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

No presente artigo analisam-se numericamente, através do Método de Lattice Boltzmann (LBM), as propriedades hidrodinâmicas e térmicas de uma cavidade quadrada preenchida com ar e lateralmente aquecida e isolada no topo e na base. O fenômeno físico estudado é o da convecção natural, que consiste num processo de transferência de calor onde o movimento do fluido se dá pela existência de forças de campo, representada pela gravidade, em um meio que apresenta diferença de temperatura.

O Método de Lattice Boltzmann é um método numérico atuante na escala mesoscópica que retrata através de uma abordagem probabilística a evolução de um sistema de partículas, representando fenômenos físicos como difusão de calor, escoamento de fluidos e propagação de ondas acústicas (KRÜGER et al., 2017). Historicamente, o método surgiu como um aprimoramento do método de *Lattice Gas Automata*, proposto por McNamara e Zanetti (1988), sendo demonstrado só mais tarde que o método consiste de uma forma discreta da equação de Boltzmann (HE e LUO, 1997; ABE, 1997).

Dixit e Babu (2005) empregaram o LBM, num retículo D2Q9, para solucionar o fenômeno de convecção natural, avaliando as situações de escoamento laminar e turbulento. Mohamad et al. (2008) e Mohamad et al. (2009), enunciam o termo de força como uma expansão de primeira e segunda ordens em termos de parâmetros conhecidos do retículo e da aceleração para o termo de empuxo, modelada por Boussinesq.

Esse estudo foi realizado com o propósito de empregar o LBM para avaliar o campo de velocidades e temperaturas, cujo código computacional está em fase de desenvolvimento e aprimoramentos quanto às formas de discretização das variáveis macroscópicas apresentadas. Esses aprimoramentos, como a regularização das propriedades hidrodinâmicas e a expansão do termo de força externa, originada da força de empuxo, foram implementados.

Ressalta-se que o método se apresenta como referência para analisar as propriedades macroscópicas em cavidades que apresentam um meio poroso ou que contém algum obstáculo. Por fim, destaca-se como objetivo iniciar o estudo do problema de convecção natural em cavidade limpa lateralmente aquecida pelo método LBM.

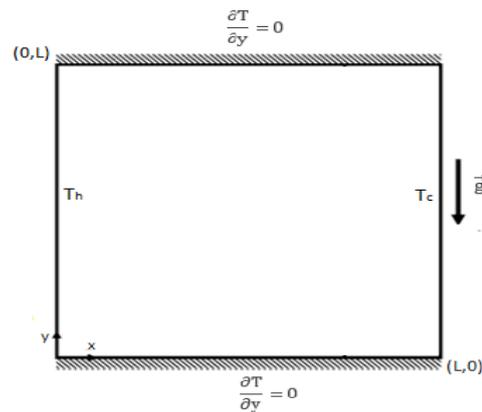
MÉTODOS

A metodologia empregada consistiu em analisar numericamente o problema de uma cavidade limpa mediante uma geometria fixada. Para tal, estabeleceram-se equações e parâmetros adimensionais que satisfazem o problema em questão. Por fim, efetuou-se o processo de discretização do espaço de velocidades e de espaço-tempo associadas à equação de Boltzmann.

GEOMETRIA E CONDIÇÕES DE CONTORNO

A Figura 1 apresenta esquematicamente a geometria e as condições de contorno utilizadas para o estudo numérico da convecção natural:

Figura 1 – Geometria de cavidade quadrada com condições de contorno



Fonte: Adaptado de Mohamad (2011)

Como condições de contorno térmicas tem-se uma cavidade quadrada (2D), aquecida pela parede esquerda com temperatura uniforme (representado por $T_h = 1,0$), e resfriada pela direita com temperatura uniforme (representado por $T_c = 0,0$). As paredes superior e inferior são adiabáticas. As condições de contorno hidrodinâmicas correspondem à velocidade de escoamento nula nas paredes, bem como vazão mássica nula pelas fronteiras da cavidade ao longo do tempo.

Dois parâmetros adimensionais que auxiliam nessa análise: os números de Rayleigh e Prandtl, apresentados nas equações (1) e (2).

$$Ra = \frac{\rho g \beta (T_h - T_{ref}) L^3}{\nu \alpha} \quad (1)$$

$$Pr = \nu / \alpha \quad (2)$$

sendo Ra o número de Rayleigh, ρ a massa específica (em kg/m^3), g a aceleração da gravidade (em m/s^2), β o fator de compressibilidade do fluido (em $1/\text{K}$), T_h a temperatura da parede aquecida (em K), T_{ref} a temperatura de referência (em K), L o comprimento da cavidade (em m), ν a viscosidade cinemática do fluido (em m^2/s), α a difusividade térmica do fluido (em m^2/s) e Pr o número de Prandtl.

DISCRETIZAÇÃO DO MÉTODO

Como demonstrado por Abe (1997) e He e Luo (1997), a equação do método LBM pode ser considerada como uma forma discretizada da equação de Boltzmann no espaço de velocidades e no espaço-tempo, descrita na equação (3) por:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla_x f + \frac{\vec{F}}{\rho} \cdot \nabla_c f = \Omega(f) \quad (3)$$

sendo f a função distribuição de partículas, \vec{c} o vetor velocidade da partícula, \vec{F}/ρ o vetor aceleração da partícula devido a forças externas e $\Omega(f)$ o operador de colisão.

No problema físico estudado, foi utilizado o retículo D2Q9, pela característica bidimensional do problema e devido aos nove pontos de discretização permitirem a recuperação das equações de conservação do problema, i.e., conservação da

massa, quantidade de movimento e da energia. Com isso, alguns parâmetros de discretização são especificados, como as funções pesos $w(\overset{r}{c}_0)=4/9$, $w(\overset{r}{c}_{1,2,3,4})=1/9$ e $w(\overset{r}{c}_{5,6,7,8})=1/36$ associadas aos vetores velocidade de rede:

$$c_o = (0, 0) \quad (4)$$

$$c_i = \left(\cos\left(\frac{(i-1)\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{(i-1)\pi}{2}\right) \right) \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

$$c_i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{(2i-9)\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{(2i-9)\pi}{4}\right) \right) \text{ para } i = 5, 6, 7, 8 \quad (6)$$

Definido o operador de colisão pelo modelo de colisão BGK, desenvolvido por Bhatnagar, Gross e Krook (1954), e aplicando os processos de discretização de velocidades e do espaço-tempo, tem-se a equação de *Lattice-Boltzmann* na forma discretizada como:

$$\hat{f}_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_i^{neq}(\mathbf{x}, t) + \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) S_i \quad (7)$$

A função distribuição de equilíbrio representada pela equação de Maxwell-Boltzmann na forma discreta é dada por:

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left(1 + \frac{\overset{r}{u} \cdot \overset{r}{c}_i}{c_s^2} + \frac{1}{2c_s^4} \overset{rr}{u} \overset{rr}{u} : (\overset{r}{c}_i \overset{r}{c}_i - c_s^2 I) \right) \quad (8)$$

sendo c_s a velocidade do som e $\overset{r}{u}$ o vetor velocidade.

O termo de força (S_i) presente na equação (7) é representado na forma discreta por:

$$S_i = w_i \left(\frac{\overset{r}{F} \cdot \overset{r}{c}_i}{c_s^2} + \frac{1}{2c_s^4} \overset{rr}{F} \overset{rr}{u} : (\overset{r}{c}_i \overset{r}{c}_i - c_s^2 I) \right) \quad (9)$$

sendo $\overset{r}{F}$ a força externa associada ao fenômeno de empuxo, que é modelado pela aproximação de Boussinesq, dada por:

$$\overset{r}{F}_{empuxo} = -\rho g \beta (T - T_{ref}) \quad (10)$$

sendo T a temperatura local.

Com objetivo de melhorar a estabilidade e reduzir erros relacionados ao método, é aplicado o processo de regularização proposto por Latt e Chopard (2006), em que a função distribuição de não equilíbrio é aproximada por:

$$f_i^{neq} \approx -\frac{w_i}{2c_s^2} \overset{r}{F} \cdot \overset{r}{c}_i + \frac{w_i}{2c_s^4} (\overset{r}{c}_i \overset{r}{c}_i - c_s^2 I) : \left(\overset{rr}{\Pi} - \frac{\Delta t}{2} \sum_i \overset{rr}{c}_i \overset{rr}{c}_i S_i \right) \quad (11)$$

sendo $\overset{rr}{\Pi}$ o tensor tensão do fluido.

A solução térmica do problema é resolvida em paralelo ao escoamento do fluido, porém de forma acoplada à hidrodinâmica. Seguindo os mesmos processos de discretização da função f , a função g representa a evolução do campo de temperatura, dada por

$$g_i(x, t + \Delta t) = g_i(x, t) - \frac{g_i(x, t) - g_i^{eq}(x, t)}{\tau_T} \quad (12)$$

sendo $\tau_T = \alpha/c_s^2$ é o tempo de relaxação térmico, relacionada a difusividade térmica do fluido, e g_i^{eq} a função distribuição de equilíbrio da parte térmica, representada na forma discretizada por:

$$g_i^{eq} = w_i T \left(1 + \frac{r \cdot r}{c_s^2} \right). \quad (13)$$

As propriedades macroscópicas (massa específica, vetor velocidade e temperatura) do problema são obtidas em função das funções distribuição, dadas a seguir:

$$\rho = \sum_{k=0}^8 f_k \quad T = \sum_{k=0}^8 g_k \quad (14)$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho} \left(\sum_{k=0}^8 f_k \vec{c}_k + \frac{1}{2} F_{empuxo} \right) \quad (15)$$

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados obtidos neste trabalho buscam a verificação do código numérico implementado para representação do fenômeno de convecção natural. Foram adotados como parâmetros o número de Rayleigh (Ra), que variam de 10^3 a 10^6 , número de Prandtl (Pr) igual a 0,71. Verifica-se que as malhas adequadas para a simulação numérica foram de 101×101 lattices para a faixa de $Ra = 10^3$ a $Ra = 10^5$, e 201×201 lattices para $Ra = 10^6$. A relação entre passo de malha e de tempo utilizada foi de 128, para $Ra = 10^3$ e 10^4 , e 64, para $Ra = 10^5$ e 10^6 .

Nesse trabalho, serão realizadas duas formas de comparações com os resultados da literatura de de Vahl Davis (1983). As grandezas quantitativas serão o número de Nusselt médio, valor máximo da componente horizontal da velocidade no plano $x=0,5$, a temperatura e a função corrente no ponto médio da cavidade. As qualitativas serão os perfis de linha de corrente e de isothermas, i.e., isolinhas de velocidade e temperatura.

A Tabela 1 compara os valores do número de Nusselt médio obtidos para os quatro casos numéricos analisados.

Tabela 1 - Comparação do número de Nusselt médio (\overline{Nu}) com resultados da literatura.

Caso	Caso (Ra)	de Vahl Davis (1983)	Presente Trabalho	Erro (%)
01	10^3	1,118	1,129	0,99%
02	10^4	2,243	2,243	1,41%
03	10^5	4,519	4,523	0,08%
04	10^6	8,800	8,858	0,66%

Fonte: Autoria Própria (2018).

A Tabela 2 verifica o valor obtido numericamente para a temperatura no ponto médio da cavidade com o valor teórico de 0,5. Esse valor teórico decorre da simetria geométrica e do problema (cavidade quadrada) e das paredes adiabáticas nas fronteiras, implicando em um processo simétrico de transferência de calor.

Tabela 2 - Avaliação da temperatura no ponto médio da cavidade (\bar{T}).

Caso	Caso (Ra)	Valor Esperado	Presente Trabalho	Erro (%)
01	10^3	0,5	0,5002	0,048%
02	10^4	0,5	0,4999	0,016%
03	10^5	0,5	0,4986	0,278%
04	10^6	0,5	0,5003	0,074%

Fonte: Autoria Própria (2018).

Para fins de comparação das variáveis hidrodinâmicas, as Tabelas 03 e 04 analisam a velocidade horizontal no plano vertical ($x = 0,5$) e a função corrente no ponto médio da cavidade, considerando a faixa de estudo referente ao número de Rayleigh.

Tabela 3 - Avaliação da função corrente no centro da cavidade (ψ).

Caso	Caso (Ra)	de Vahl Davis (1983)	Presente Trabalho	Erro (%)
01	10^3	1,174	1,173	0,09%
02	10^4	5,071	5,141	1,38%
03	10^5	9,111	9,083	0,31%
04	10^6	16,320	16,540	1,35%

Fonte: Autoria Própria (2018).

Tabela 4 - Avaliação da componente horizontal do vetor velocidade ($|\dot{u}|$).

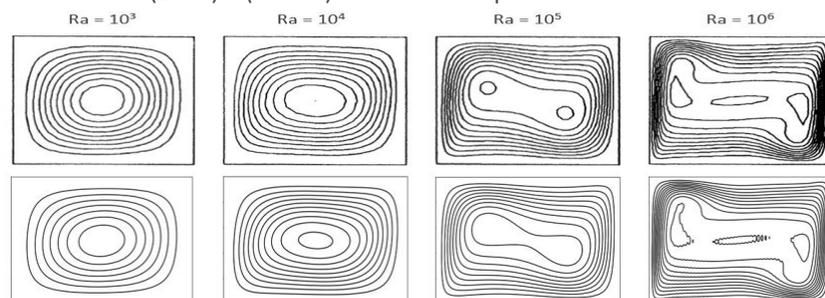
Caso	Caso (Ra)	de Vahl Davis (1983)	Presente Trabalho	Erro (%)
01	10^3	3,649	3,644	0,14%
02	10^4	16,178	16,358	1,11%
03	10^5	34,730	35,442	2,05%
04	10^6	64,630	66,510	2,91%

Fonte: Autoria Própria (2018).

Com base nos dados quantitativos, pode-se afirmar que o LBM consegue obter de forma muito eficiente as propriedades hidrodinâmicas e térmicas, podendo ser aplicado ao fenômeno de convecção natural em cavidades.

Na análise das variações de velocidade ao longo da cavidade, a Figura 2 ilustra as linhas de corrente. Observe a grande semelhança entre as apresentadas pelo artigo e as geradas neste trabalho. Nota-se também um estreitamento das linhas de corrente com o aumento do número de Rayleigh em torno das paredes isotérmicas, o que ilustra a intensificação no gradiente de velocidades no escoamento em torno das fronteiras isotérmicas.

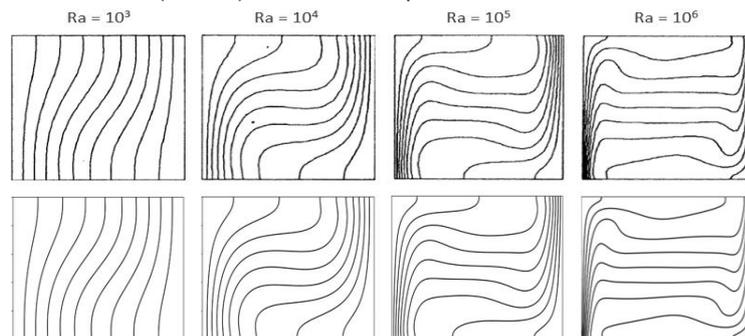
Figura 2 – Comparativo das Linhas de Corrente: (acima) resultados de de Vahl Davis (1983) e (abaixo) resultados do presente trabalho.



Fontes: de Vahl Davis (1983) e autoria própria (2018).

Analogamente à comparação das linhas de corrente, na Figura 3, verifica-se significativa variação na forma das isotermas com o aumento no número de Rayleigh. Isso é ocasionado pela intensificação das velocidades gerada pelo processo de transferência de calor por convecção natural. Ocorre que, com o aumento de Ra , o processo de transferência de calor passa a ser predominantemente convectivo e os gradientes de temperatura se intensificam, i.e., existe o aumento no fluxo de calor em torno das paredes isotérmicas.

Figura 3 – Comparativo das Isotermas: (acima) resultados de de Vahl Davis (1983) e (abaixo) resultados do presente trabalho.



Fontes: de Vahl Davis (1983) e autoria própria (2018).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se pelo presente trabalho a validade do LBM para as análises do fenômeno físico estudado, pois foram gerados resultados condizentes com os valores obtidos por de Vahl Davis (1983). Além disso, verificou-se que o processo de regularização contribuiu substantivamente para a estabilidade do método empregado, sem comprometer os resultados apresentados. Outra análise que pôde ser feita foi quanto aos processos de discretização associados aos termos de força e de distribuição de probabilidades. Alcançou-se melhora significativa no que diz respeito aos resultados quando aproximações de segunda ordem para a obtenção da equação de Boltzmann foram empregadas.

Para trabalhos futuros, sugere-se o aprofundamento e a continuidade desse estudo, de modo a avaliar cavidades preenchidas por um meio poroso, ou que apresentem partículas sólidas dispersas no seu interior. Por fim, verificou-se a eficiência do método de Lattice Boltzmann na representação do fenômeno da convecção natural em cavidades fechadas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao apoio do CENPES/PETROBRAS, ao Programa Institucional de Apoio às Ações de Inovação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR-Inovação) e à Fundação de Apoio à Educação, Pesquisa e Desenvolvimento Científico e Tecnológico da UTFPR (FUNTEF-PR).

REFERÊNCIAS

ABE, T. **Derivation of the lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation.** Journal of Computational Physics, v. 131, n. 1, p.241–246, 1997. ISSN 0021-9991

BHATNAGAR, P. L.; GROSS, E. P.; KROOK, M. **A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems.** Phys. Rev., American Physical Society, v. 94, p. 511–525, 1954.

DIXIT, H. N.; BABU, V. **Simulation of high Rayleigh number in a square cavity using Lattice Boltzmann Method.** International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 49, p. 727-739, 2005.

HE, X.; LUO, L.-S. **Theory of the Lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation.** Phys. Rev. E, American Physical Society, v. 56, p. 6811–6817, 1997.

KRÜGER, T.; KUSUMAATMAJA, H.; KUZMIN, A.; SHARDT, O.; SILVA, G.; VIGGEN, E. M. **The Lattice Boltzmann Method.** [S.l.]: Springer, 2017.

LATT, J.; CHOPARD, B. **Lattice Boltzmann method with regularized pre-collision distribution functions.** Mathematics and Computers in Simulation, v. 72, p. 165-168, 2006.

MCNAMARA, G. R.; ZANETTI, G. **Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata.** Phys. Rev. Lett., American Physical Society, v. 61, p. 2332–2335, 1988.

MOHAMAD, A.A. **Lattice Boltzmann method: fundamentals and engineering applications with computer codes.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.

MOHAMAD, A.A.; EL-GANAOU, M.; BENNACER, R. **Lattice Boltzmann simulation of natural convection in an open-ended cavity.** International Journal of Thermal Science, v. 48, p. 1870-1875, 2008.

MOHAMAD, A.A.; KUZMIN, A. **A critical evaluation of force term in Lattice Boltzmann Method, natural convection problem.** International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 53, p. 990-996, 2009.

VAHL DAVIS, D. **Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution.** International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 3, pp. 249-264, 1983.