

<https://eventos.utfpr.edu.br/sei/sei2018>

Atividades e estudos sobre o uso do método das diferenças finitas para a solução de equações diferenciais parciais.

Activities and studies about the finite difference method usage of solving partial differential equations.

Ricardo Augusto Andreotti
andreotti@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

Adilandri Mércio Lobeiro
alobeiro@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

RESUMO

OBJETIVO: Levar à comunidade acadêmica a solução numérica da equação da deflexão de placas pelo Método de Diferenças Finitas, por meio de minicursos, palestras e eventos. **MÉTODOS:** Implementação de uma rotina de cálculo em MatLab® para obtenção da solução numérica do problema analisado assim como comprovação experimental. **RESULTADOS:** Comparação entre os resultados numéricos obtidos pelo software desenvolvido em MatLab® e o software SAP 2000, com um erro relativo em torno de 1,5 %. **CONCLUSÕES:** Ao comparar os resultados, observou-se que foram satisfatórios, o que demonstrou a aplicabilidade e a eficiência do método numérico para a solução das equações diferenciais parciais de quarta ordem que modela a deflexão de placas ortotrópicas, gerando grande interesse da comunidade acadêmica.

PALAVRAS-CHAVE: Numérico. Placas. Extensão.

ABSTRACT

OBJECTIVE: To bring the numerical solution of the plate deflection equation to the academic community using the Finite Differences Method through mini-courses, lectures and events. **METHODS:** Implementation of a MatLab®'s routine to obtain the numerical solution of the analyzed problem as well as experimental verification. **RESULTS:** Comparison between the numerical results obtained by software build in MatLab® with the software SAP 2000, with a relative error of around 15 %. **CONCLUSIONS:** When the results were compared, it was observed that they were satisfactory, which demonstrated the applicability and the efficiency of the numerical method for the solution of the fourth order partial differential equations that models the deflection of orthotropic plates. That fact, generated a great interest of the academic community.

KEYWORDS: Numerical. Plates. Extension.

Recebido: 09 fev. 2016.

Aprovado: 12 mar. 2016.

Direito autoral:

Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

Conforme Sodré (2003), há uma variedade de fenômenos que podem ser descritos por Equações Diferenciais (ED), que são classificadas em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), quando possuem derivadas de apenas uma variável e por Equações Diferenciais Parciais (EDP), na qual possui derivadas com mais de uma variável independente.

Para trazer a comunidade acadêmica exemplos de um desses fenômenos que são descritos por tais equações, foi estudado a deflexão de placas, assunto que é de devida importância para a Engenharia Civil, pois é comum a existência de elementos estruturais com esta forma, como as lajes.

Tais placas, quando submetidos a carregamentos (forças), sofrem deformações na direção das forças aplicadas. Estas deformações são a consequência do fenômeno ao qual se dá o nome de deflexão. O controle da deflexão é importante, pois mesmo que não levem a estrutura à ruptura, deflexões muito grandes assustam os usuários da edificação, bem como impedem seu pleno uso (LEITÃO, 2014).

O fenômeno da deflexão é descrito por uma EDP de quarta ordem que não possui solução analítica, por tal motivo, os métodos numéricos são ótima ferramenta, pois fornecem uma solução aproximada com precisão satisfatória.

O método numérico aqui apresentado será o Método das Diferenças Finitas (MDF), que basicamente consiste em transformar o domínio em um conjunto de pontos através da discretização e construir aproximações para as derivadas na ED por meio da expansão em série de Taylor. Essas aproximações, denominadas quocientes de diferenças, ao substituir na ED e ao variar o ponto em torno de tal expansão, obtém um sistema de equações algébricas.

Este trabalho, possui como objetivo, apresentar as atividades que foram realizadas ao longo do segundo semestre de 2017 e primeiro semestre de 2018, no qual condiz com o esforço de levar a comunidade acadêmica a solução numérica da equação da deflexão de placas pelo MDF, por meio de minicursos, palestras e eventos.

MÉTODOS

Segundo Cusens e Pama (1975), a deflexão de placas de pequena espessura, pode ser calculada pela equação (1),

$$D_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) + 2H \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) + D_y \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) = p(x, y), \quad (1)$$

onde, $D_x = Eh^3 / ((12(1 - \nu_x^2)))$, $D_y = Eh^3 / ((12(1 - \nu_y^2)))$, $H = (D_x \nu_x + D_y \nu_y + 4D_{xy}) / 2$ e $D_{xy} = (G t^3) / 6$; na qual $u(x, y)$ é o deslocamento vertical de cada ponto da placa, $p(x, y)$ representa os carregamentos sobre sua superfície, h é a espessura da placa e ν , E_x e G são, respectivamente, o coeficiente de Poisson, módulo de elasticidade e módulo de elasticidade transversal, constantes que dependem de cada material que compõe a placa.

Para a implementação do MDF na Equação (1), Burden e Faires (2010), deve-se realizar a discretização do domínio, para tanto seleciona-se valores inteiros M e N , divide o intervalo no eixo x ($a \leq x \leq b$) em M subintervalos de mesmo tamanho h , dado por $h = (b - a)/M$ e o intervalo no eixo y ($c \leq x \leq d$) em N subintervalos de mesmo tamanho k , dado por $k = (d - c)/N$. Os valores h e k são denominados passos nos eixos x e y , respectivamente. Desta maneira, obtém-se

$$x_i = a + ih, \forall i = 0, 1, 2, \dots, M$$

e

$$y_j = c + jk, \forall j = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Com o domínio discretizado, aproximou-se as derivadas nos pontos por meio da série de Taylor, obtendo-se as seguintes aproximações para os termos com derivadas presentes na Equação (1).

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, y_j) = \left(u(x_{i+2}, y_j) - 4u(x_{i+1}, y_j) + 6u(x_i, y_j) - 4u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i-2}, y_j) \right) / h^4, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_j) = \left(u(x_i, y_{j+2}) - 4u(x_i, y_{j+1}) + 6u(x_i, y_j) - 4u(x_i, y_{j-1}) + u(x_i, y_{j-2}) \right) / k^4 \quad (3)$$

e

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x_i, y_j) = \left(\left(u(x_{i+1}, y_{j+1}) - 2u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_{j+1}) + 4u(x_i, y_j) - 2u(x_i, y_{j-1}) + u(x_{i-1}, y_{j+1}) - 2u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_{j-1}) \right) \right) / h^2 k^2. \quad (4)$$

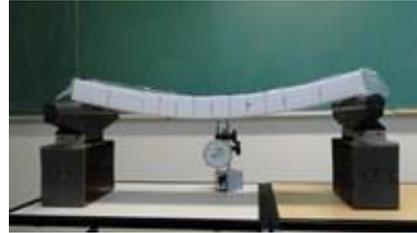
Substituindo (2), (3) e (4) em (1), em que $u(x_i, y_j) \approx w_{i,j}$, obtém-se o sistema de equações lineares, sendo

$$Aw_{i+2,j} + Bw_{i+1,j} + Cw_{i,j} + Bw_{i-1,j} + Aw_{i-2,j} + Dw_{i+1,j+1} + Dw_{i+1,j-1} + Ew_{i,j+1} + Ew_{i,j-1} + Dw_{i-1,j+1} + Dw_{i-1,j-1} + Fw_{i,j+2} + Fw_{i,j-2} = G, \quad (5)$$

onde, $A = k^4 D_x$, $B = -4(D_x k^4 + H h^2 k^2)$, $C = 6D_x k^4 + 8H h^2 k^2 + 6D_y h^4$, $D = 2H h^2 k^2$, $E = -4(H h^2 k^2 + D_y h^4)$, $F = D_y h^4$ e $G = p h^4 k^4$.

Para gerar o interesse da comunidade acadêmica, pensou-se em um experimento que poderia ser realizado nos locais que ocorreriam a apresentação, com fácil transporte e executabilidade. Para tanto, escolheu-se uma placa retangular de acrílico, com 695 mm de largura, 104,05 mm de comprimento e 3,95 mm. Tal placa foi posicionada apoiada em duas bordas paralelas e livre nas outras duas, representando a ideia de uma ponte. Nela foi colocado um carregamento uniformemente distribuído, dado por uma caixa de isopor com 2 kg de manilha de aço no seu interior, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Placa experimental

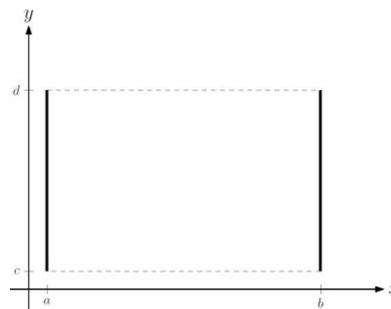


Fonte: Autoria própria (2017).

Para a leitura da deformação experimental, utilizou-se um relógio comparador analógico, conforme a Figura 1. Após obter a solução experimental, implementou-se um algoritmo no software *MatLab*® para obter a solução numérica e comparar com a experimental.

Somente utilizando a equação (5) não é possível obter a solução do problema, pois a quantidade de incógnitas presentes é maior que a quantidade de equações, para tanto, utiliza-se das condições de contorno para obter a solução numérica do problema de deflexão de uma placa delgada. Ao posicionar a placa nos eixos principais, Figura 2,

Figura 2 – Placa bi-apoiada



Fonte: Autoria própria (2017).

tem-se, que a mesma está sujeita as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(a, y) = 0, \quad u(b, y) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, d) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(b, y) = \\ 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, c) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, d) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, c) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

Ao aproximar as derivadas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = (u(x_0 + h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - h, y_0))/h^2, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = (u(x_0, y_0 + k) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 - k))/k^2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_j) = (u(x_0 + 2h, y_0) - (x_0 - 2h, y_0) - 2u(x_0 + h, y_0) + 2u(x_0 - h, y_0))/2h^3, \quad (9)$$

e

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_j) = (u(x_0, y_0 + 2k) - (x_0, y_0 - 2k) - 2u(x_0, y_0 + k) + 2u(x_0, y_0 - k))/2k^3, \quad (10)$$

e aplicá-las nas condições de contorno dadas pela equação (6), lembrando que $u(x_i, y_j) \approx w_{i,j}$, tem-se

$$\begin{aligned}
 w_{1,j} &= 0, \\
 w_{0,j} &= -w_{2,j}, \\
 w_{M+1,j} &= 0, \\
 w_{M+2,j} &= -w_{M,j}, \\
 w_{i,2} - 2w_{i,1} + w_{i,0} &= 0, \\
 w_{i,3} - w_{i,-1} - 2w_{i,2} + 2w_{i,0} &= 0, \\
 w_{i,N+2} - 2w_{i,N+1} + w_{i,N} &= 0, \\
 w_{i,N+3} - w_{i,N-1} - 2w_{i,N+2} + 2w_{i,N} &= 0,
 \end{aligned} \tag{11}$$

o que torna o sistema de equações lineares possível e determinável, de $(M - 1)(N + 1)$ incógnitas.

Para a implementação computacional, é necessário conhecer as propriedades do material, para tanto, realizou-se um experimento que consistiu na colocação de duas cargas (P), de valores conhecidos, no centro da placa de acrílico, medindo a deformação (δ) causada pelos mesmos. A primeira carga, que consistiu do primeiro carregamento, foi de um cubo de madeira de massa $P_1 = 0,097 \text{ kg}$, que causou uma deformação $\delta_1 = 0,138 \text{ mm}$. A segunda carga, foi a união de dois cubos de madeira, o primeira de carga $P_1 = 0,097 \text{ kg}$, com o segunda carga $\bar{P}_2 = 0,138 \text{ kg}$ ou seja, $P_2 = \bar{P}_2 + P_1 = 0,235 \text{ kg}$, que causou uma deformação $\delta_2 = 7,09 \text{ mm}$, assim, o módulo de elasticidade E_x , é obtido com o uso da expressão

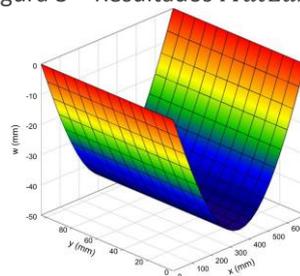
$$E_x = \frac{12(P_2 - P_1)gL^3}{48(\delta_2 - \delta_1)bh^3}, \tag{12}$$

onde, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, b é a base, L a largura e h a altura da seção, obtendo $E_x = 3552,8 \text{ MPa}$.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

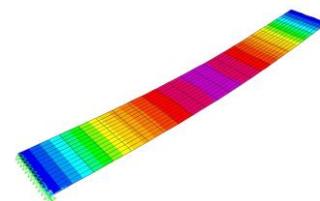
Com as condições de contorno, implementou-se em uma rotina de cálculo em *MatLab*®, obtendo o resultado apresentado na Figura 3. Para fins de comparação, o mesmo estudo de caso foi modelado no software comercial, SAP 2000, conforme a Figura 4.

Figura 3 – Resultados *MatLab*®



Fonte: Autoria própria (2018).

Figura 4 – Modelagem SAP2000



Fonte: Autoria própria (2018).

Tabela 1 – Comparação entre resultados *MatLab*® e SAP2000

x (mm)	y (mm)	w_{SAP} (mm)	$w_{MatLab}^{\text{®}}$	Erro relativo (%)
0	52,025	0,00	0,00	0%
31,59	52,025	-6,494	-6,5976	1,57%
189,54	52,025	-34,1193	-34,631	1,478%
347,49	52,025	-44,8694	-45,528	1,447%
410,67	52,025	-43,0976	-43,732	1,451%
600,21	52,025	-18,8888	-19,182	1,528%

Fonte: Autoria própria (2018).

Visto em Tabela 1, os resultados foram satisfatórios, o que incentivou a divulgação do trabalho para outras universidades. Realizou-se um minicurso para o II Simpósio de Métodos Numéricos Aplicados em Engenharia (II SMNE) no centro Politécnico da Universidade Federal do Paraná (UFPR) em Curitiba, Paraná, que ocorreu nos dias 25 a 27 de outubro de 2017, com o título “Solução de Equação Diferencial Parcial via sistema de equações lineares”.

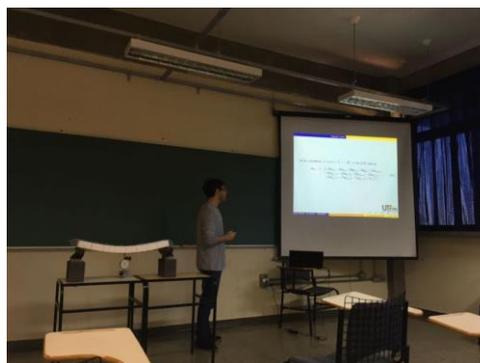
Figura 5 – Minicurso no II SMNE



Fonte: Autoria própria (2017).

Outro minicurso foi apresentado no VII Ciclo de Palestras e Perspectivas Matemáticas (VII Cipem), feito pelo Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Campo Mourão, que ocorreu nos dias 06 a 08 de novembro de 2017, com o título “Solução numérica da equação diferencial parcial que controla a deflexão em placas delgadas”.

Figura 6 – Minicurso no VII Cipem

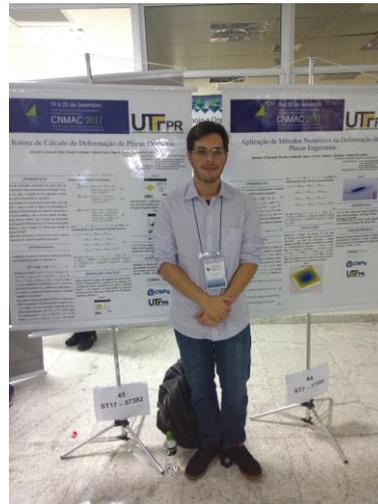


Fonte: Autoria própria (2017).

Em complemento às aulas de cálculo numérico do professor orientador Adilandri Mércio Lobeiro, os mesmos estudos foram apresentados para suas turmas de Engenharias da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Houve a apresentação dos trabalhos intitulados, “Aplicação de Métodos Numéricos na Deformação de Placas Engastadas” e “Rotina de Cálculo de Deformação de Placas Delgadas” em formato de pôster para o XXXVII Congresso Nacional de matemática aplicada e computacional 2017 (XXXVII CNMAC). Ambos os trabalhos também foram publicados na revista “*Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*” em que o próprio congresso fornece para os autores.

Figura 8 – Banners no XXXVII CNMAC



Fonte: Autoria própria (2017).

Essas atividades fizeram parte do projeto intitulado “Estudo da deflexão de placas com uso do método das diferenças finitas desenvolvido como atividade de extensão”, referente ao EDITAL PROREC 01/2017-UTFPR-EXTENSÃO.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A dificuldade de resolver analiticamente a EDP apresentada, obter a solução numérica neste caso, com o uso das diferenças finitas, foi de fundamental importância. Ao levar este estudo um grupo de docentes de outras universidades, obteve-se um respaldo positivo o que proporcionou satisfação em ter realizado o trabalho, além de motivações e incentivos para a continuação do projeto, com ótimas sugestões.

Observou-se ao analisar o erro relativo percentual, que os resultados obtidos via algoritmo implementado, são satisfatórios, verificando que o MDF é eficiente para obter a solução da EDP de quarta ordem, pois é mais simples de ser aplicado ao comparado com o Método dos Elementos Finitos, utilizado pelo software comercial SAP 2000.

Como futuras apresentações, nos dias 17 a 21 de setembro, será apresentado o trabalho “Aplicação de métodos numéricos na deformação de placas em balanço” no XXXVIII Congresso Nacional de matemática aplicada e computacional 2017 (XXXVIII CNMAC).

REFERÊNCIAS

BURDEN, R.; FAIRES, J. **Numerical Analysis**. 9. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-538-7351-9.

CUSENS, A.; PAMA, R. **Bridge Deck Analysis**. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1975. ISBN0-471-18998-7.

LEITÃO, V. M. A. et al. **Apontamentos sobre Análise Elástica Linear de Lajes**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2014. Disponível em: <http://www.civil.ist.utl.pt/luis/textos/lajes.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2014. 6023

SODRÉ, Ulysses. **Equações diferenciais parciais**. Londrina, 2003.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR – Brasil, com apoio da Fundação Araucária. Agradeço também ao meu orientador Adilandri Mércio Lobeiro pela ótima orientação e amizade.