



## Introdução à Teoria dos Grafos e aplicações na resolução de problemas

### Introduction to Graph Theory and applications in problems solving

**Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha**

[jhonatancunha@alunos.utfpr.edu.br](mailto:jhonatancunha@alunos.utfpr.edu.br)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

**Érika Patrícia Dantas de Oliveira Guazzi**

[erikapatricia@utfpr.edu.br](mailto:erikapatricia@utfpr.edu.br)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

#### RESUMO

Este projeto buscou o estabelecimento de uma relação entre conteúdos dos ensinos médio e superior e aplicações no cotidiano das pessoas, mais especificamente a teoria dos grafos. Assim, foram divulgados cinco vídeos para alunos do ensino médio, de escolas públicas, a fim de difundir o estudo sobre a teoria dos grafos, disponibilizar material digital (que poderá ser utilizado como ferramenta de ensino) e instigá-los da importância de conteúdos matemáticos básicos nas aplicações cotidianas. Também buscou superar as dificuldades existentes na formação acadêmica dos alunos do ensino superior por meio de uma formação complementar, ao abordar algumas ferramentas matemáticas comumente não estudadas nas matérias obrigatórias do currículo. E, diante destes saberes conjuntamente com aqueles adquiridos nas disciplinas obrigatórias, trabalhou com a teoria dos grafos tanto em nível de pesquisa do ensino superior quanto em um nível mais básico para divulgá-lo a comunidade externa. Em relação aos alunos do ensino médio, almejou-se exibir conteúdos matemáticos por meio de outras abordagens, as quais possibilitaram instigá-los e apresentar uma vivência diferente da matemática com o seu cotidiano. Consequentemente, espera-se que tal projeto tenha impactado positivamente os alunos a fim de maior motivação nos estudos e, de forma geral, na sua formação cidadã.

**PALAVRAS-CHAVE:** Teoria dos grafos. Matemática aplicada. Ensino médio.

#### ABSTRACT

In this project, it was planned to establish a relationship between high school and higher education content and applications in people's daily lives, more specifically the graph theory. Thus, five videos were released to high school students from public schools, in order to disseminate the study on graph theory, provide digital material (which can be used as a teaching tool) and instigate them about the importance of mathematical content basics in everyday applications. It also sought to overcome the existing difficulties in the academic training of higher education students through complementary training, by approaching some mathematical tools not commonly studied in the compulsory subjects of the curriculum. And, in view of this knowledge together with those acquired in the compulsory subjects, understand the graph theory both at the level of research in higher education and encompass it at a more basic level in order to disseminate it to the external community. In relation to high school students, the aim was to exhibit mathematical content through other approaches, which made it possible to instigate them and present a different experience of mathematics with their daily lives. Consequently, it is expected that such a project will positively impact students in order to be more motivated in their studies and, in general, in their citizenship education.

**KEYWORDS:** Theory of graphs. Applied mathematics. High school.



## INTRODUÇÃO

Educar é um grande desafio nos dias de hoje. Existem vários fatores a serem ponderados no sistema educacional, dos quais se podem citar o distanciamento entre o ensino médio e o ensino superior, bem como as dificuldades apresentadas no ensino médio, seja por desinteresse dos alunos ou falta de estrutura das escolas (humano ou material) e as limitações existentes nas universidades públicas. Estes fatores provocam um desânimo generalizado em todos os envolvidos no sistema educacional.

Além disso, existe a necessidade dos alunos do ensino superior conviverem e partilharem os conhecimentos adquiridos com a comunidade externa, de forma direta ou indireta, além das universidades, a partir do tripé ensino-pesquisa-extensão, contribuir ativamente na melhoria e aprimoramento do ensino básico nas escolas públicas.

Desde a antiguidade até os dias de hoje, utiliza-se o conhecimento matemático na resolução de diversos problemas de modo a obter soluções mais acessíveis, ou seja, resolver um problema da forma mais simples e econômica possível. Diante disso, ressalta-se a importância de realizar uma adequada modelagem matemática do problema, ou seja, realizar todo o cálculo no papel ou no computador antes de aplicá-lo (BOAVENTURA NETTO, 2017).

Assim, destacam-se os grafos, dentre as diversas abordagens matemáticas que podem ser empregadas, por possuírem uma estrutura matemática simples e muito útil, que pode ser empregada nos mais diversos problemas reais.

Diante disso, o objetivo do presente projeto de extensão foi o estabelecimento de uma relação entre conteúdos do ensino médio, do ensino superior e aplicações no cotidiano das pessoas, mais especificamente por meio da teoria dos grafos. Para tanto, foram divulgados cinco vídeos para alunos do ensino médio de escolas públicas, a fim de difundir o estudo sobre a teoria dos grafos, disponibilizar um material digital que poderá ser utilizado posteriormente como ferramenta de ensino e instigar estes alunos da importância de conteúdos matemáticos básicos nas aplicações cotidianas. Como consequência, decorreu uma ligação entre os dois níveis de ensino e o cotidiano que os cerca.

Em outras palavras, a motivação principal para o desenvolvimento deste projeto foi tentar atrair a atenção dos alunos do ensino médio para os conteúdos matemáticos que os mesmos aprendem. Com base nisso, desenvolveu-se um material didático sobre a utilização de grafos na resolução de problemas, com objetivo de fazer os alunos visualizarem a importância da matemática e quebrar a distância imposta entre os conteúdos abordados no ensino médio e nível superior.

No material disponibilizado aos alunos, apresentam-se como os conteúdos abordados no ensino superior podem ser associados aos conteúdos ensinados no ensino médio. Esta associação se dá por meio da utilização de ferramentas matemáticas que os alunos de ensino médio têm capacidade de manusear. Desta forma, conseguiu-se exibir aos alunos ferramentas como conjuntos e matrizes, por exemplo, as quais têm sua importância na busca por soluções para problemas de seu cotidiano.

Esse projeto pretendeu superar as dificuldades existentes na formação acadêmica dos alunos do ensino superior por meio de uma formação complementar, ao abordar algumas ferramentas matemáticas comumente não estudadas nas matérias obrigatórias do currículo. E, então, diante destes saberes conjuntamente com aqueles adquiridos nas disciplinas obrigatórias, ou seja, ensino e pesquisa, entender a teoria dos grafos tanto em nível de pesquisa do ensino superior quanto o abranger em um nível mais básico a fim de divulgá-lo a comunidade externa, a saber, à extensão.



Em relação aos alunos do ensino médio, ambicionou-se exibir conteúdos matemáticos por meio de outras abordagens, as quais possibilitem instigá-los e apresentar uma vivência diferente da matemática com o seu cotidiano. Como consequência, almejou-se que tal apresentação impactasse positivamente os alunos a fim de maior motivação nos estudos e, de forma geral, na sua formação cidadã.

Por fim, deseja-se que todos os envolvidos direta ou indiretamente sejam impactados por meio da experiência vivenciada nas diferentes abordagens (ensino-pesquisa-extensão), bem como as suas vantagens, impactos e limitações em cada uma delas.

## **MATERIAIS E MÉTODOS**

A fim de atingir os objetivos do projeto, foram estabelecidas as seguintes metas:

- a) estudar os elementos básicos da matemática necessários ao estudo da teoria dos grafos;
- b) compreender os modelos de grafos e suas relações;
- c) entender os problemas de caminhos, de interligação e de coloração;
- d) estudar os grafos planares e suas propriedades;
- e) estudar e planejar atividades com aplicações imediatas, tornando-as mais acessíveis ao desenvolvimento da sociedade;
- f) gravar e disponibilizar os vídeos para alunos que estejam cursando o ensino médio em escolas públicas, a fim de difundir tal estudo, disponibilizar um material digital que poderá ser utilizado posteriormente como ferramenta de ensino e instigar tais alunos da importância de conteúdos matemáticos básicos nas aplicações cotidianas.

Para tanto, a fim de atingir o objetivo citado, foi adotada a seguinte metodologia:

- i) Realização de estudos individuais e grupos de estudo, com o intuito de fortalecer as bases necessárias para um bom entendimento dos conceitos envolvidos na teoria dos grafos e dos conceitos matemáticos necessários e os principais problemas;
- ii) Elaboração de atividades e discussões sobre as dificuldades, as vantagens e possíveis alterações a fim de tornar tais atividades mais atraentes para alunos de ensino médio;
- iii) gravação de vídeos e confecção de material complementar a serem disponibilizados aos alunos, a fim de fomentar discussões acerca de seu aperfeiçoamento, e integração de suas aplicabilidades às mais diversas áreas do conhecimento.

Assim, iniciou-se o estudo sobre os conceitos gerais da teoria dos grafos. Para isso, utilizou-se como livro texto a referência (BOAVENTURA NETTO, 2017), além de outros livros e/ou materiais indicados nas referências, por exemplo, as referências (NICOLETTI, 2017) e (MURTY, 2008), para solidificar e/ou complementar o entendimento dos conceitos gerais.

Mais especificamente, foi necessário seguir uma ordem cronológica dos estudos, ou seja, primeiramente começar com os conceitos básicos sobre grafos, por exemplo, vértices e arestas/arcos. Sendo assim, o primeiro conceito estudado, foi basicamente entender o que seria um grafo, assim como quais são os elementos matemáticos que o formam.



Após ter conhecimento sobre a estrutura básica de um grafo, discutiu-se como, a partir de um problema real, realizar a modelagem do mesmo utilizando grafos. E então, buscou utilizar todas as ferramentas disponíveis da teoria dos grafos em busca de uma solução viável para o problema modelado.

Por conseguinte, estudou as outras formas de representar os grafos, a saber, utilizando listas e matrizes, em que a última é fortemente utilizada na representação de grafos na computação. Assim, passou-se ao estudo de conceitos necessários para a resolução de problemas reais, por exemplo, os conceitos de vizinhança, fecho transitivo, percursos, conjuntos especiais, coloração de vértices/arestas, problemas de fluxos, entre outros.

Estes conceitos possibilitaram compreender o funcionamento de diversos algoritmos importantes que utilizam a estrutura de grafos para a busca de uma solução de diversos problemas já conhecidos. Além disso, com o avanço da pesquisa e dos estudos, foi possível compreender o funcionamento de rotinas computacionais da teoria dos grafos, como o algoritmo de Dijkstra (busca caminho mínimo entre vértices do grafo), Ford-Fulkerson (busca o fluxo máximo em um grafo) e Hierholzer (realiza a busca de um ciclo euleriano em um grafo).

Provido de tais conhecimentos, iniciou-se a pesquisa por aplicações já estabelecidas e a busca para desenvolver algumas aplicações que empreguem grafos na busca de sua resolução, a fim de estabelecer de uma relação entre conteúdos do ensino médio, do ensino superior e aplicações no cotidiano das pessoas, mais especificamente a teoria dos grafos.

No primeiro caso, por exemplo, pesquisou-se sobre a leitura/reconhecimento da impressão digital que utiliza o conhecimento de grafos, em que as minúcias (que são características encontradas nas impressões digitais, em geral, divididas em dois tipos, a saber, final de linha e bifurcação) são os vértices e as arestas são os segmentos de linhas que conecta as minúcias, para então serem utilizadas as propriedades dos grafos (RODRIGUES, 2015; NANDI, 2006).

Como exemplo do segundo caso, aplicou-se o já conhecido Problema do Carteiro Chinês (busca de um percurso euleriano) em uma situação atual, a saber, a distribuição das vacinas contra a COVID-19. Mais especificamente, com finalidade de aplicar as ferramentas de grafos em um assunto da atualidade, motivando ainda mais os alunos, foi modelado a 11ª Regional de Saúde do Paraná como um grafo não orientado e ponderado, veja a Figura 1. O estabelecimento das arestas desse grafo foram obtidas a partir da análise das rodovias que ligam essas cidades. Ressalta-se que não consideraram-se as estradas rurais que ligam essas cidades, e para as valorações utilizou-se a distância em quilômetros entre as cidades, obtidas pelo *website* do Google Maps. Além disso, foi aplicado no mesmo grafo uma outra abordagem na busca do melhor caminho para a entrega das vacinas, a saber, o Problema do Caixeiro Viajante. Neste caso, buscou-se obter um percurso hamiltoniano como solução do problema.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Foram alcançadas as seguintes metas estabelecidas:

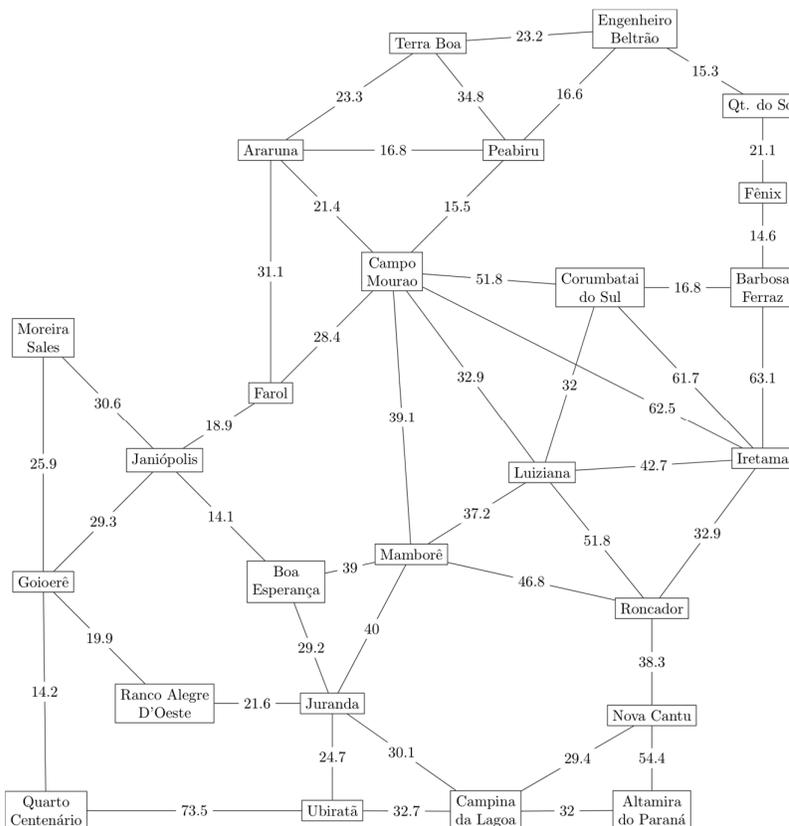
- a) estudo dos elementos básicos da matemática necessários ao estudo da Teoria dos Grafos;
- b) compreensão dos modelos de grafos e suas relações;
- c) entendimento dos problemas de caminhos, de interligação e de coloração;
- d) estudo dos grafos planares e suas propriedades;



e) planejar atividades com aplicações imediatas, tornando-as mais acessíveis ao desenvolvimento da sociedade;

f) gravar atividades/vídeos e divulgar em escolas públicas, para alunos que estejam cursando o ensino médio, a fim de difundir este estudo, disponibilizar um material digital que poderá ser utilizado posteriormente como ferramenta de ensino e instigar tais alunos da importância de conteúdos matemáticos básicos nas aplicações cotidianas.

Figura 1 – Grafo não-orientado e ponderado da 11.ª Regional de Saúde do Paraná



Fonte: Autoria própria (2021).

A partir dessas metas, o conteúdo foi modularizado em cinco vídeos conjuntamente com materiais textuais elaborados para cada um deles.

Mais especificamente, o primeiro vídeo teve o objetivo de apresentar uma breve introdução à teoria dos grafos para, assim, possibilitar um contato inicial, apresentando o conteúdo de maneira formal e complementando com exemplos para facilitar a compreensão dos alunos.

No segundo vídeo, o objetivo foi apresentar alguns exemplos de aplicações da teoria dos grafos. De forma geral, buscou exibir como as ferramentas de grafos podem facilitar o processo de resolução, se possível, de diversos problemas das mais diversas áreas. Por exemplo, destacaram-se as seguintes aplicações:

- I. elaborar a programação de uma estação FM por meio de grafos (OLIVEIRA, 1993);
- II. geração de sequências viáveis para montagem automatizada (GUIMARÃES, 1993);



III. realizar uma nova configuração em redes elétricas de média tensão com base no Algoritmo de Prim (CÁRCAMO-GALLARDO, 2007);

IV. verificação de impressões digitais usando modelo de vetor característico baseado em grafos planares (RODRIGUES, 2015).

Em seguida, no terceiro vídeo, o objetivo foi apresentar uma breve introdução ao Problema do Carteiro Chinês por meio da teoria dos grafos. Foi proposto o problema de distribuição das vacinas para COVID-19 na 11ª Regional de Saúde do Paraná, o qual foi modelado e buscou-se a solução a partir do desenvolvimento do famoso Problema do Carteiro Chinês. Para tanto, utilizou-se algumas ferramentas como o Algoritmo de Hierholzer (LEVADA, 2021), e o Método Húngaro (GUIRADO, 2014).

No quarto vídeo, o objetivo principal foi apresentar uma breve introdução ao Problema do Caixeiro Viajante por meio da Teoria dos Grafos. Particularmente, foi proposto o problema de distribuição das vacinas para COVID-19 na 11.ª Regional de Saúde do Paraná, em que após a modelagem, buscou-se uma solução viável por meio do desenvolvimento do famoso Problema do Caixeiro Viajante. Em especial, dentre as ferramentas utilizadas ressalta-se a **FITSP** (*Farthest Insertion for Traveling Salesman Problem*), ou seja, a Inserção mais Distante para o Problema do Caixeiro Viajante (KRUITHOF, 2012).

Finalmente, no quinto e último vídeo, foram comparadas as duas soluções encontradas para o problema da distribuição da vacinas contra o COVID-19 apresentadas nos vídeos 3 e 4. Em especial, foi debatido sobre quais das duas soluções era a ideal para a modelagem do problema da distribuição das vacinas para COVID-19 na 11.ª Regional de Saúde do Paraná.

Assim, a partir da divulgação dos vídeos e materiais em escolas públicas para alunos que estejam cursando o ensino médio, almejou-se contribuir para uma educação de qualidade em todos os níveis, mais especificamente, possibilitar que os alunos do ensino médio vislumbrem a importância e indissociabilidade dos conceitos matemáticos em nível médio, superior e aplicações no cotidiano, em especial a teoria dos grafos. E conseqüentemente, uma maior motivação nos estudos, bem como na sua formação cidadã de forma geral.

Os resultados alcançados, mais especificamente em nível acadêmico, consistiram na compreensão de algumas ferramentas matemáticas, tais como a definição e propriedades dos grafos, bem como os principais problemas modelados por meio dos grafos e as suas diversas aplicações. Desse modo, diante destes saberes, entender a teoria dos grafos tanto em nível de pesquisa acadêmica quanto o abranger em um nível mais básico a fim de divulgá-lo a comunidade externa, por exemplo, apresentando tais resultados em escolas.

Destaca-se que, inicialmente, o planejamento do projeto previa a realização de apresentações (seminários e/ou aplicações de atividades) para alunos de ensino médio de uma ou duas escolas públicas em Campo Mourão. Contudo, devido à Pandemia pelo Coronavírus iniciada em 2020 e, conseqüentemente ao fechamento das escolas, foi necessário adaptar o projeto.

Diante disso, uma solução encontrada foi a gravação de vídeos e disponibilizá-los na plataforma do YouTube (serviço de compartilhamento de vídeos), assim como, os materiais necessários no Google Drive (serviço de armazenamento e sincronização de arquivos).

Desta forma, conseguiu-se atingir um público maior, propagando mais conhecimento sobre a utilização dos conteúdos abordados no ensino médio em ferramentas da teoria dos grafos, assim como diversas possibilidades de aplicações reais. Ao final da produção de todos os vídeos, entramos em contato com algumas escolas de diversas cidades, oferecendo todo o material para que as mesmas apresentassem para seus alunos.



## CONCLUSÃO

A partir da divulgação dos vídeos e materiais em escolas públicas para alunos que estejam cursando o ensino médio, almejou-se contribuir para uma educação de qualidade em todos os níveis, mais especificamente, possibilitar que os alunos do ensino médio vislumbrem a importância e indissociabilidade dos conceitos matemáticos em nível médio, superior e aplicações no cotidiano, em especial a teoria dos grafos. E conseqüentemente, buscou uma maior motivação nos estudos, bem como na sua formação cidadã de forma geral.

Os resultados obtidos em nível acadêmico consistiram na compreensão de algumas ferramentas matemáticas, tais como a definição e propriedades dos grafos, e dos principais problemas modelados por meio dos grafos e as suas diversas aplicações. Diante de tais saberes, pretendeu entender a teoria dos grafos tanto em nível de pesquisa acadêmica quanto o abranger em um nível mais básico a fim de divulgá-lo à comunidade externa.

Desta forma, o presente projeto de extensão alcançou o objetivo, a saber, o estabelecimento de uma relação entre conteúdos do ensino médio, do ensino superior e aplicações no cotidiano das pessoas, mais especificamente a teoria dos grafos, decorre uma ligação entre os dois níveis de ensino e o cotidiano que os cerca.

Por fim, com a publicação dos assuntos na plataforma de compartilhamentos de vídeos do YouTube, conseguiu-se propagar as informações de maneira simplificada. Sendo assim, todos os alunos têm a possibilidade de rever os conteúdos em qualquer momento caso necessitem. Portanto, é válido afirmar que as metas do projeto foram atingidas, mesmo com o atual cenário pandêmico em que se vive atualmente.

## AGRADECIMENTOS

Ao Colégio Estadual de Paranavaí e ao Instituto Federal do Paraná, câmpus avançado Goioerê pela parceria na divulgação desse projeto junto aos seus alunos.

## REFERÊNCIAS

CÁRCAMO-GALLARDO, Angely; SANTANDER, Luis García; PEZOA, Jorge Edgardo. **Reconfiguración de Redes Eléctricas de Media Tensión basada en el Algoritmo de PRIM**. Ingeniare. Revista chilena de ingeniería, v. 15, n. 1, p. 83-91, 2007.

RODRIGUES, Ramyses de Macedo; COSTA, Marly Guimarães Fernandes; COSTA FILHO, Cicero Ferreira Fernandes. **Fingerprint verification using characteristic vectors based on planar graphics**. Signal, Image and Video Processing, v. 9, n. 5, p. 1121-1135, 2015.

GUIMARÃES, Gilcina; NETTO, Paulo Oswaldo; NAVEIRO, Ricardo Manfredi. **Geração de seqüências viáveis para montagem automatizada**. Production, v. 3, n. 1, p. 33-44, 1993.

GUIRADO, João Cesar; ROCHA, Márcio Roberto da. O método húngaro para resolução de problemas de otimização. **XII EPREM—Encontro Paranaense de Educação Matemática. Campo Mourão**, 2014.



SEI-SICITE 2021

Pesquisa e Extensão para um mundo em transformação

XI Seminário de Extensão e Inovação  
XXVI Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica  
08 a 12 de Novembro - Guarapuava/PR



KRUIHOF, Mariëlle. **Traveling Salesman Problem Comparisons between heuristics, linear and semidefinite programming approximations**. 2012. 68 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Faculty of Science and Engineering, University of Groningen. Groningen, 2012.

LEVADA, Alexandre Luis Magalhães. **Algoritmo de Hierholzer**. Youtube, 18 jan. 2021. Disponível em: <<https://youtu.be/G1diwiNcAk8>>. Acesso em: 22 ago. 2021.

NANDI, Regina de Cássia. **Isomorfismo de grafos aplicado à comparação de impressões digitais**. 2006.

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo; JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos: introdução e prática**. Editora Blucher, 2017.

NICOLETTI, Maria do Carmo; HRUSCHKA JÚNIOR, Estevam Rafael. **Fundamentos da teoria dos grafos para computação**. Grupo GEN. 2017.

MURTY, Uppaluri Siva Ramachandra; BONDY, Jonh Adrian. **Graph Theory (graduate texts in mathematics 244)**. 2008.

OLIVEIRA, Márcio Samamede de; BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo; TEIXEIRA, Rogério de Campos. **Um sistema para programação de uma estação FM**. Production, v. 3, n. 1, p. 27-32, 1993.