



## **Desenvolvimento do Aplicativo Métodos de Matemática Aplicada – Simulador da Série de Fourier (MMA-SSF): estudo de caso**

### **Application development to support Fourier Series study: Methods of Applied Mathematics – Fourier Series Simulator**

**Rafael Angelini Donda**

[rafaeldonda@alunos.utfpr.edu.br](mailto:rafaeldonda@alunos.utfpr.edu.br)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

**Flávio Luiz Rossini**

[flrossini@utfpr.edu.br](mailto:flrossini@utfpr.edu.br)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

**Reginaldo Nunes de Souza**

[rnsouza@utfpr.edu.br](mailto:rnsouza@utfpr.edu.br)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

**Renato Vinicius Garcia**

[renatogarcia@alunos.utfpr.edu.br](mailto:renatogarcia@alunos.utfpr.edu.br)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

#### **RESUMO**

O artigo apresenta o aplicativo Métodos de Matemática Aplicada – Simulador da Série de Fourier (MMA-SSF), o qual foi desenvolvido para representação de sinais periódicos de tempo contínuo por meio da Série de Fourier. O MMA-SSF possui como base doze sinais, simples e compostos, frequentemente utilizados em problemas fictícios ou práticos. Cada sinal é passível de ser configurado pelo usuário por meio dos parâmetros de entrada do aplicativo, os quais possibilitam que o sinal seja ajustado de forma precisa à forma desejada. Como resultado, o aplicativo apresenta a forma analítica, a representação gráfica temporal e espectral da série solicitada, elementos essenciais para o entendimento dos fundamentos da Série de Fourier. O simulador também conta com o Manual de Uso anexo a sua tela inicial, que explica desde a instalação até a utilização para obter os resultados desejados. Por fim, mostra-se sucintamente as telas de navegação e possibilidades de uso por meio de um exemplo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Série de Fourier, Simulador, Sinal Periódico.

#### **ABSTRACT**

The paper shows the application Methods of Applied Mathematics – Fourier Series Simulator (MMA-SSF), who was developed for representation of periodic signals of continuous time through Fourier Series. The MMA-SSF is based on twelve signals, simple and composite, often uses in fictitious or practice problems. Each signal is able to be configured by the user through input parameters of the application, which enable to accurately adjust the signal to the desire shape. As a result, the application shows the analytical shape, temporal graphic representation and spectrums of the requested series, essential elements for understanding the fundamentals of Fourier Series. The simulator also has a Use Manual attached to its home screen, that explain from the installation to use to get the desired results. Finally, the navigation screens and possibilities of use are briefly shown through an example.

**KEYWORDS:** Fourier Series, Simulator, Periodic Signal.



## INTRODUÇÃO

Publicado no clássico texto *Théorie Analytique de la Chaleur*, o matemático francês Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830), afirmou que uma função arbitrária definida em um intervalo finito poderia ser expressa como uma soma de senoides, dando origem assim à Série de Fourier (LATHI, 2006).

Na física e na engenharia, a expansão de funções em termos de senos e cossenos é útil, pois permite facilmente a manipulação das funções que são descontínuas ou difíceis de representar analiticamente. Em particular, os campos da eletrônica, mecânica quântica e eletrodinâmica fazem grande uso da Série de Fourier (KASHYAP; PUNDLIK; KHAN, 2018). Tavares Júnior (2020) em seu estudo pontuou a importância dessa ferramenta matemática na área das comunicações.

Já o trabalho de Tang et al. (2018) realizou a generalização da análise da Série de Fourier para a avaliação da vibração de um compressor linear, considerando a linearização da força do gás, o processamento do sinal e a estimativa da frequência natural.

Como citado anteriormente, torna-se evidente a importância da Série de Fourier como ferramenta de apoio em análises de diversos problemas. Na disciplina de Métodos de Matemática Aplicada do curso de Engenharia Eletrônica da UTFPR-CM, em que a Série de Fourier é um assunto obrigatório, há grande dificuldade dos alunos checarem as soluções analíticas e numéricas. Isso ocorre, uma vez que os cálculos são onerosos, pois envolvem integrais e em alguns casos com números complexos. Assim, surgiu a ideia de gerar um aplicativo para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem dessa importante ferramenta matemática, para potencializar a compreensão a partir da verificação das respostas analíticas e gráficas, sendo essa última, representações no tempo e na frequência.

Nesse sentido, elaborou-se o aplicativo Métodos de Matemática Aplicada – Simulador da Série de Fourier (MMA-SSF) para disponibilizar ao usuário tanto a expressão analítica da Série de Fourier nas suas três formas, trigonométrica, trigonométrica compacta e complexa, quanto a representação gráfica temporal e seus espectros de amplitude e fase.

De maneira geral, o aplicativo permite que cada um dos doze sinais, escolhidos pela didática ou aplicações práticas, seja configurado tanto no eixo de amplitude quanto no eixo de tempo. Além disso, o usuário pode escolher a forma e o número de harmônicas presentes na Série de Fourier. Isso permite que o usuário visualize por meio de gráficos, tanto no tempo quanto na frequência, os efeitos de cada harmônica no sinal resultante.

O artigo apresenta inicialmente o embasamento teórico dos cálculos realizados pelo aplicativo, seguido da apresentação de suas principais telas, um estudo de caso e a otimização dos algoritmos de resolução.

## MATERIAIS E MÉTODOS

A Série de Fourier descreve sinais periódicos de tempo contínuo, esses são compostos de período e certa modulação de amplitude. A partir dos parâmetros da Série de Fourier, torna-se possível descrever esses sinais em partes numa forma de somatória infinita de parcelas trigonométricas. Um sinal  $x(t)$  pode ser representado pela Série Trigonométricas de Fourier como

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (1)$$

sendo  $N \in [1, \infty)$  o número de harmônicas,  $\omega_0$  a frequência fundamental, medida em  $rad/s$ , definida por



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (2)$$

em que  $T_0$  é o período fundamental do sinal, medido em segundos, e  $a_0, a_n$  e  $b_n$  são os parâmetros da série, definidos como

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)dt \quad (3)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad (4)$$

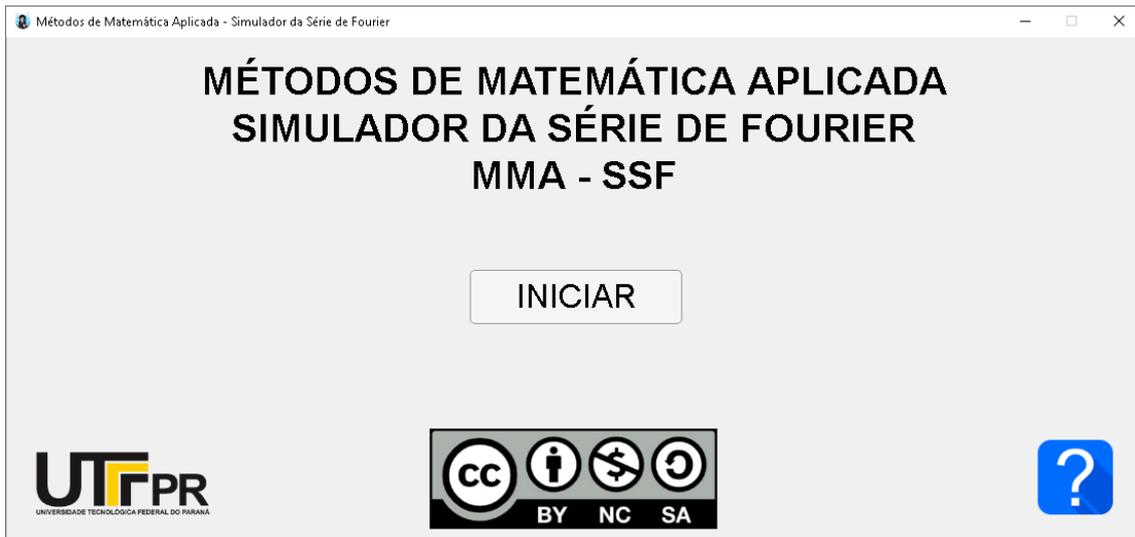
$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t)\sen(n\omega_0 t)dt \quad (5)$$

Além da forma trigonométrica, a Série de Fourier também pode ser expressa na forma trigonométrica compacta e complexa. Nesse estudo somente sua forma trigonométrica será abordada.

#### APRESENTAÇÃO DO APLICATIVO

O aplicativo foi desenvolvido na ferramenta *AppDesigner* do MATLAB, cuja motivação foram a facilidade de utilização e iteratividade com o usuário, através de elementos visuais autoexplicativos. Na Figura 1, é apresenta sua tela inicial.

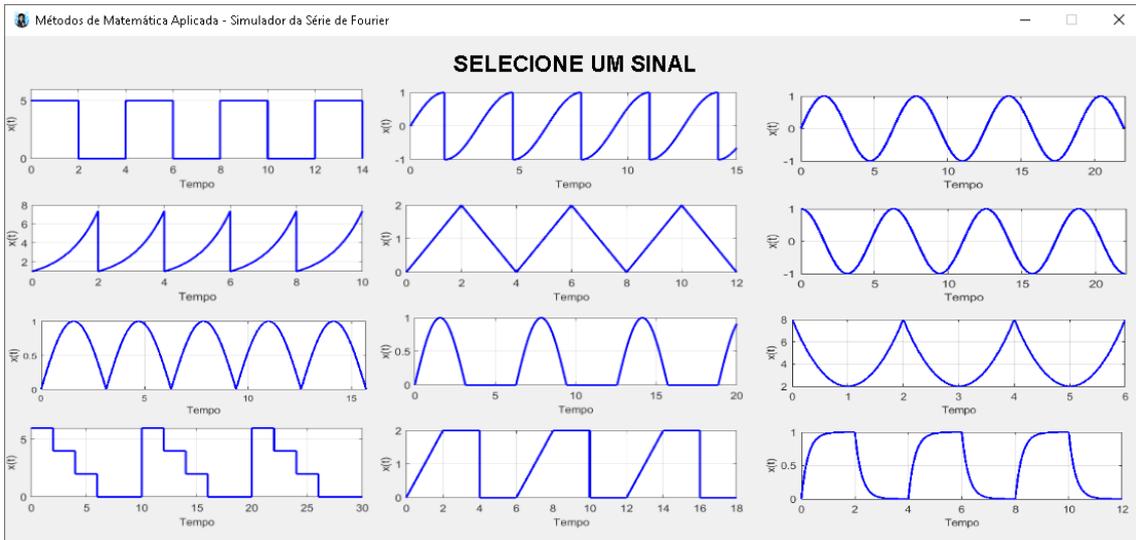
Figura 1 – Tela inicial do aplicativo



Fonte: Autoria própria (2021).

Na parte inferior, canto esquerdo, está presente a logo da UTFPR e ao clicar sobre ela, a página principal da universidade (<http://www.utfpr.edu.br/>) é aberta no navegador padrão. No canto direito, há um botão de interrogação, que abre o Manual de Uso. Ao centro está presente o botão INICIAR, clicando sobre ele a próxima tela abrirá, onde é possível selecionar um dentre doze sinais mais utilizados no estudo da Série de Fourier, como mostrado na Figura 2.

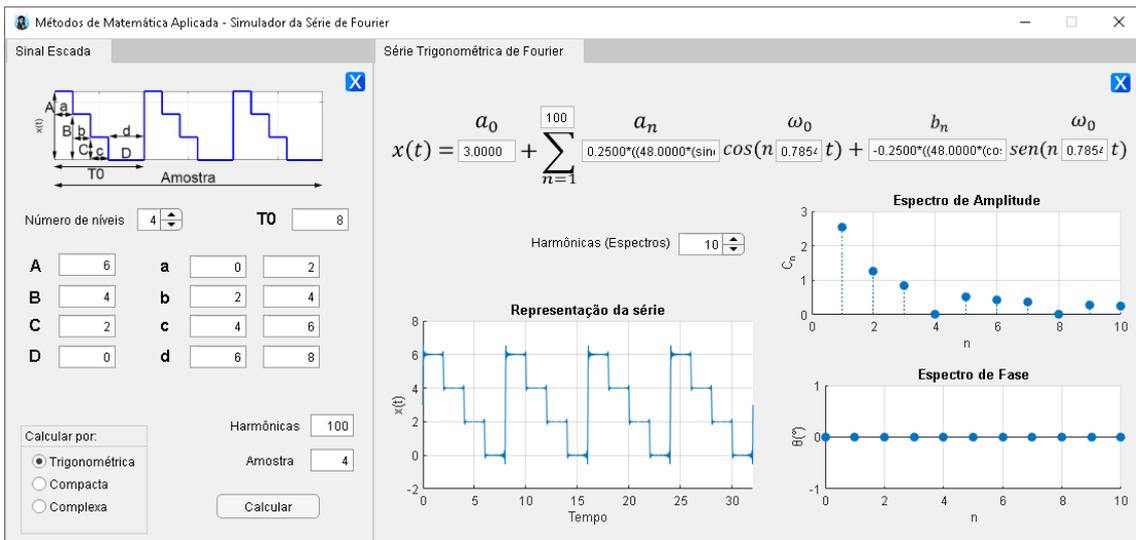
Figura 2 – Tela de seleção de sinais



Fonte: Autoria própria (2021).

Cada sinal possui parâmetros pré-definidos, janela à esquerda na Figura 3. No entanto, o usuário pode alterá-los a fim de obter a forma desejada. Em seguida é possível selecionar a forma da série e clicar sobre o botão “calcular” para visualizar os resultados, janela à direita da Figura 3.

Figura 3 – Sinal Escada do MMA-SSF



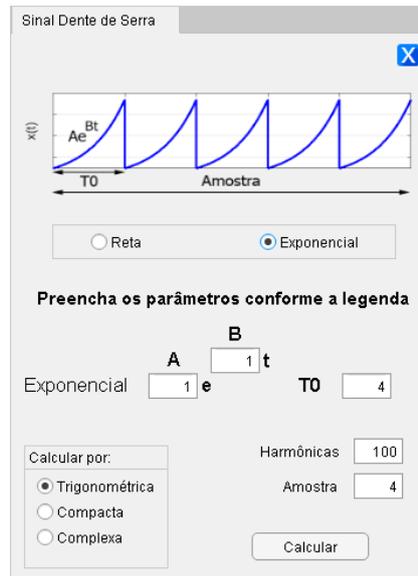
Fonte: Autoria própria (2021).

Como pode ser observado na Figura 3, o gráfico de representação da série segue o formato parametrizado (amplitude das retas horizontais e seus intervalos definidos) na janela “Sinal Escada”, bem como os espectros de amplitude e fase. Para a expressão analítica, os parâmetros da Série Trigonômica de Fourier são exibidos, como selecionado na janela de configuração do sinal.

## ESTUDO DE CASO

Para representar uma aplicação prática será feita a simulação de uma onda muito utilizada na eletrônica moderna, a dente de serra. Trata-se de uma reta crescente com período fundamental definido, suas aplicações vão desde fontes de alimentação até a amostragem de sinais em amplificadores classe D. O MMA-SSF possui em seu conjunto de sinais esse tipo de onda, podendo ser escolhida uma rampa reta, Figura 5, ou exponencial, Figura 4, para sua construção.

Figura 4 – Janela de configuração de um sinal dente de serra de rampa exponencial

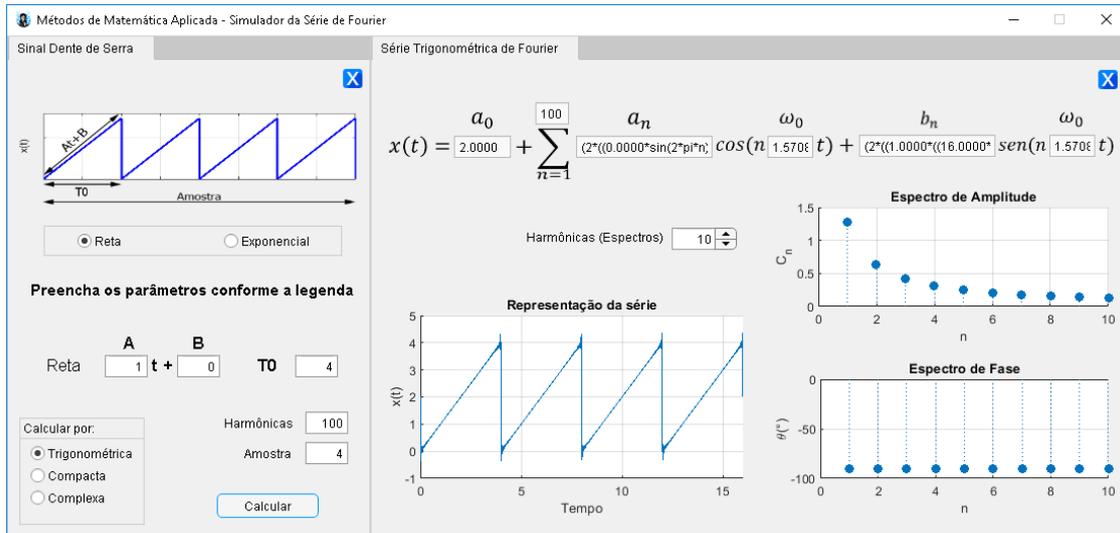


Fonte: Autoria própria (2021).

O sinal dente de serra mais comum é com uma reta crescente, a qual já é pré-configurada pelo simulador na janela “Sinal Dente de Serra” com uma reta com coeficiente angular 1 e coeficiente linear 0, período fundamental 4, 100 harmônicas e 4 repetições do período fundamental, Figura 5.

Na janela “Série Trigonômica de Fourier” é possível visualizar a representação do sinal pela Série de Fourier com 100 harmônicas pelo gráfico “Representação da série”. Esse gráfico pode ser decomposto em dois, o “Espectro de Amplitude” e o “Espectro de Fase”, onde são representadas a amplitude ( $C_n$ ) e fase ( $\theta(^\circ)$ ) de cada componente da frequência do sinal, em que  $n$  é a multiplicação de  $n \cdot \omega_0$ .

Figura 5 – Simulação de um sinal dente de serra com rampa reta



Fonte: Autoria própria (2021).

Como exibido na Figura 5, os parâmetros da Série Trigonométrica de Fourier encontrados pelo simulador foram

$$\omega_0 = 1,5708$$

$$a_0 = 2$$

$$a_n = - \frac{4(\text{sen}^2(\pi n) - \pi n \text{sen}(2\pi n))}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \frac{2(\text{sen}(2\pi n) - 2\pi n \text{cos}(2\pi n))}{\pi^2 n^2}$$

Para verificar os resultados encontrados pelo aplicativo, será realizado o cálculo manual dos parâmetros da série

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \approx 1,5708$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^4 (1t + 0) dt = 2$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \text{cos}(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{4} \int_0^4 (1t + 0) \text{cos}\left(n \frac{\pi}{2} t\right) dt = \frac{2(2\pi n \text{sen}(2\pi n) + \text{cos}(2\pi n) - 1)}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{4} \int_0^4 (1t + 0) \text{sen}\left(n \frac{\pi}{2} t\right) dt = \frac{2(\text{sen}(2\pi n) - 2\pi n \text{cos}(2\pi n))}{\pi^2 n^2}$$

É possível notar que os parâmetros encontrados pelo MMA-SSF seguem uma expressão menos simplificada se comparado com os encontrados manualmente, devido às limitações da plataforma utilizada para a confecção do aplicativo, o MATLAB AppDesigner.

Porém, os parâmetros encontrados nos dois casos são equivalentes e retornam um resultado coerente quanto a representação do sinal pela Série de Fourier, como demonstrado no gráfico “Representação da série” na Figura 5.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

No início do desenvolvimento do aplicativo houve dificuldades quanto a modelagem dos sinais, já que para encontrar os parâmetros da Série de Fourier seria necessário a resolução de integrais, o que aumentaria demasiadamente o tempo de processamento dos cálculos. Dessa forma, as integrais foram resolvidas previamente de maneira genérica, sendo suas expressões resultantes utilizadas para o cálculo dos parâmetros. A Figura 6 demonstra como é possível atribuir valores às variáveis da expressão genérica.

Figura 6 – Exemplo de configuração para o sinal triangular

Sinal Triangular

$x(t)$

$A=1, B=0$   $C=1, D=4$

$a=0, b=2$   $a=2, b=4$

$T_0=4$

Amostra

Preencha os parâmetros conforme a legenda

Intervalo

Reta crescente  $A$   $B$   $a$   $b$

Reta decrescente  $C$   $D$   $a$   $b$

$T_0$

Calcular por:

Trigonômica

Compacta

Complexa

Harmônicas

Amostra

Calcular

Fonte: Autoria própria (2021).

Como apresentado na Figura 6, o sinal triangular é composto de duas retas, uma crescente, sendo “A” seu coeficiente angular, “B” o coeficiente linear e “a” o intervalo, e outra decrescente, sendo “C” seu coeficiente angular (com negação implícita), “D” o coeficiente linear e “b” o intervalo.

Seguindo essa notação, o aplicativo substitui os valores preenchidos nas expressões genéricas e calcula os parâmetros da Série de Fourier através de equações simples, evitando a resolução de integrais.

Para o cálculo das integrais o algoritmo levava cerca de 8,0897 segundos para encontrar a expressão analítica da série e plotar a representação do sinal pela Série de Fourier com 50 harmônicas. Com o desenvolvimento otimizado (expressões genéricas das integrais previamente resolvidas), a mesma tarefa leva cerca de 0,2675 segundos para ser realizada. Uma melhora de aproximadamente 3024% em relação ao custo computacional e tempo gasto.

Para realizar os testes com os algoritmos foi feita a média de 10 simulações em duas situações, com e sem otimização, em um computador com processador Ryzen 5 3600 3,6 GHz, chipset B450, 16 GB de memória RAM DDR4 3000 MHz, placa de vídeo GTX 1660 4 GB e sistema operacional Windows 11 64 bits.



## CONCLUSÃO

Após toda a análise realizada, pode-se constatar que o MMA-SSF é uma poderosa ferramenta para auxiliar tanto o processo de ensino por parte do professor quanto o processo de aprendizagem dos estudantes sobre a teoria da Série de Fourier. A visualização das componentes de amplitude e fase do sinal, bem como o gráfico de representação pela Série de Fourier, é de grande valia para compreender a aplicabilidade da Série de Fourier.

O MMA-SSF busca ser uma plataforma de fácil e rápido entendimento, por meio de representações gráficas pré-estabelecidas e reconfiguráveis. Dessa forma possibilita a rápida parametrização e a obtenção de resultados tanto analíticos quanto gráficos da série, potencializando o entendimento e aprofundando o conhecimento dos estudantes.

## AGRADECIMENTOS

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná pelo incentivo e apoio financeiro viabilizado por meio do edital 38/2020 PROGRAD.

## REFERÊNCIAS

KASHYAP, A.; PUNDLIK, P.; KHAN, A. J. On Application of Fourier Series. **International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences**. [s.l.]. v. 11, n. 1, p. 45-53, 2018. Disponível em: <<http://dSPACE.fudutsinma.edu.ng/jspui/handle/123456789/2435>>. Acesso em: 2 set. 2021.

LATHI, B. P. **Sinais e sistemas lineares**: 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

ROSSINI, F. L. et. al. **Métodos de Matemática Aplicada – Simulador da Série de Fourier (MMA-SSF) Manual de Uso**. [s.l.]: [s.n.], 2021.

TANG, M. et. al. Fourier Series Analysis Applied in Linear Compressor Vibration Analysis. **IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)**. Changchun. p. 1065-1069. 2018. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8484394>>. Acesso em: 2 set. 2021.

TAVARES JÚNIOR, L. G. **Aplicações da série de Fourier em análise de sinais elétricos**. Trabalho de Conclusão de Curso – Bacharel em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal Rural do Semi-árido. Angicos. 2020. Disponível em: <<http://repositorio.ufersa.edu.br/handle/prefix/6158>>. Acesso em: 2 set. 2021.