

Análise de metodologias de refino h -adaptativo em MEF utilizando estimativa pós-solução de erros de discretização em elasticidade unidimensional

RESUMO

Vinicius Gaspar

vinicius-gaspar@live.com

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil

Prof^o Dr. Diego Amadeu F. Torres

diegotorres@utfpr.edu.br

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil

Prof^o MSc. Jéderson da Silva

jedersonsilva@utfpr.edu.br

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil

Este trabalho apresenta uma análise sobre métodos de recuperação de gradientes convencionalmente utilizados em estimativas de erros de discretização, em termos da norma energia, em aproximações via Método de Elementos Finitos. São estudadas as técnicas da média nodal simples, a técnica Zienkiewicz-Zhu e a Recuperação por Superconvergência em Subdomínios (SPR). Considerando problemas de elasticidade unidimensional, duas metodologias h -adaptativas são avaliadas. A primeira técnica, designada por Ch^p , é baseada na convergência assintótica do erro teoricamente conhecida enquanto a segunda, apresentada como Recuperação Quadrática do Erro, fundamenta-se na construção de uma função densidade do erro em energia e na solução de um problema de otimização. Avalia-se, adicionalmente, o desempenho de cada uma das técnicas h -adaptativas frente à estimativa de erro pós-solução, utilizando cada uma das recuperações estudadas, e como cada recuperação se comporta em aproximações com diferentes graus polinomiais das funções-base.

PALAVRAS-CHAVE: Método de Elementos Finitos. Estimadores de erro. h -adaptatividade.

INTRODUÇÃO

O Método de Elementos Finitos (MEF) (FISH, 2007; REDDY, 2006) é uma ferramenta matemática desenvolvida para a solução numérica aproximada de problemas de engenharia complexos, formulados variacionalmente a partir de equações diferenciais ordinárias ou parciais.

A qualidade de uma aproximação via MEF pode ser avaliada através de uma norma do erro em energia ou, em termos percentuais, por um erro relativo em energia (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987, p. 339). Como geralmente a solução exata do problema é desconhecida, a aproximação pode ser comparada com uma solução recuperada a partir da própria aproximação (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987, 1992a, 1992b), mediante metodologias de estimativa de erro pós-solução. A fim de se melhorar e controlar o erro, técnicas *h*-adaptativas são utilizadas para modificar o tamanho dos elementos na malha, e ainda adicionar o remover elementos (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; OÑATE; BUGEDA, 1993; DÍEZ; HUERTA, 1999).

METODOLOGIA

Para as análises, optou-se pela avaliação de um **problema de elasticidade unidimensional**, no qual busca-se estudar uma barra deformável submetida a um carregamento externo distribuído na direção do comprimento. O problema possui condições de contorno de Dirichlet e Neumann homogêneas. Dessa maneira, a equação de equilíbrio do problema é dada por:

$$\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du_o(x)}{dx} \right) + b(x) = 0, \text{ com } 0 \leq x \leq 1$$

A função $u_o(x)$ a ser determinada representa o deslocamento axial de toda seção transversal numa posição x . O carregamento distribuído empregado é uma função polinomial quadrática da forma $b(x) = -8x^2 + 8x - 1$. Além disso, tem-se que $A = 0,01 \text{ m}^2$ é a área da seção transversal e $E = 100 \text{ Pa}$ é o módulo de elasticidade do material. A solução deste sistema físico é uma função polinomial de quarto grau da forma $u_o(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$.

Quanto à estimativa do erro de discretização, o **método de recuperação** a ser avaliado é a Superconvergência de Subdomínios ou SPR (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992a, 1992b). Salienta-se que o estudo também contemplou outros dois métodos comumente empregados.

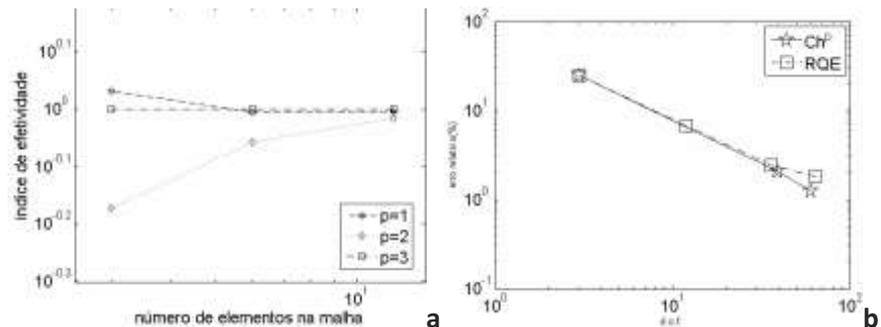
Duas **técnicas *h*-adaptativas** foram avaliadas. A primeira é baseada na convergência assintótica do erro, conhecida como metodologia Ch^p (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987). A segunda técnica *h*-adaptativa é a Recuperação Quadrática do Erro e foi proposta por Pereira *et al.* (2016).

O objetivo do trabalho é avaliar a efetividade das recuperações das aproximações de tensões e comparar o desempenho das metodologias de refino *h*-adaptativo utilizando estimativa de erro pós-solução baseada nas metodologias de recuperação estudadas.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Figura 1 apresenta curvas comparando o índice de efetividade com o número de elementos distribuídos em uma malha uniforme e considerando diferentes graus polinomiais (p). Neste resultados, a recuperação considerada é a SPR.

Figura 1 – (a) Índice de Efetividade para malhas com 3, 6 e 12 elementos de ordens $p=1, 2$ e 3 . (b) Comparação das técnicas de refino h -adaptativo para malhas com elementos de ordem $p=1$. A sigla d.o.f. significa degrees-of-freedom, ou seja, número de graus de liberdade.



Fonte: Autoria própria (2017).

Na Figura 1(a), percebe-se um desempenho melhor para elementos de grau ímpar, sugerindo o fenômeno de dicotomia (BASBUSKA; STROUBOLIS; 2001), e uma tendência de melhora na efetividade da estimativa do erro mediante o refinamento da malha quando p é par, sugerindo robustez- h para o estimador.

Percebe-se, na Figura 1(b), que as duas técnicas h -adaptativas apresentaram desempenho semelhante. Entretanto, a técnica Ch^p se mostrou mais eficiente, uma vez que necessitou de somente 2 iterações de refino, a partir da malha inicial, para satisfazer o nível de erro permitido, enquanto o refino RQE demandou 3 iterações de refino. Nota-se ainda que a primeira metodologia ainda conduziu a um erro menor, se comparados os erros para as últimas malhas.

CONCLUSÃO

Os resultados expostos na curva de índice de efetividade mostram que o método de recuperação SPR fornece uma estimativa de erro melhor quando se utilizam elementos de grau ímpar na malha, porém essa diferença de desempenho para elementos de grau par tende a diminuir em malhas muito refinadas.

No que diz respeito a h -adaptatividade, a metodologia Ch^p se mostrou mais eficiente que a metodologia RQE, para o carregamento reportado aqui. Porém, embora para a técnica Ch^p a convergência tenha sido alcançada com um menor número de graus de liberdade, a quantidade destes utilizada pela técnica RQE não foi muito diferente. Assim, pode-se considerar a técnica RQE uma alternativa razoável de refino h -adaptativo.

Analysis of adaptive h -refinement methodologies in FEM using a-posteriori discretization error estimates for unidimensional elasticity

ABSTRACT

This paper presents an analysis on gradient recovery methods conventionally used in discretization errors estimates, in terms of energy norm, in Finite Element Method approximations. The simple nodal average, the Zienkiewicz-Zhu and the Superconvergent Patch Recovering (SPR) techniques are studied. Considering one-dimensional problems, two adaptive h -refinement methodologies are evaluated. The first technique, called Ch^p , is based on the theoretically known asymptotic error convergence whereas the second, which is presented as Quadratic Error Recovery, is based on the construction of an energy error density function, and on the solution of an optimization problem. Additionally, the performance of each adaptive h -refinement method is assessed against the a-posteriori error estimation, using all the recovery techniques studied, and the behavior of such recovery techniques in case of different polynomial degrees basis-functions is analyzed.

KEYWORDS: Finite Element Method. Error Estimators. h -adaptativity.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná pela bolsa no programa PIBIT – Programa Institucional de Iniciação em Desenvolvimento Tecnológico e Inovação. Agradeço também aos meus professores orientadores Dr. Diego Amadeu F. Torres e MSc. Jéderson da Silva por todo conhecimento que transmitiram a mim até hoje.

REFERÊNCIAS

BABUSKA I.; STROUBOLIS T. **The finite element method and its reliability**, Oxford University Press, 2001.

DÍEZ, P.; HUERTA, A.. A unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptivity. **Comput. Methods Appl, Mech, Engrg.** Barcelona, p. 215-229. 26 maio 1999.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T.. **A First Course in Finite Elements**. West Sussex: John Wiley & Sons, Ltd, 2006. 319 p.

ONÃTE, E.; BUGEDA, G.. A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis. **Engineering Computations**. Barcelona, p. 307-321. 01 dez. 1993.

PEREIRA, J. T.; SILVA, J.; GONÇALVES, J. C. L.. Método dos elementos finitos h-adaptativo: uma nova técnica para projeção isotrópica do tamanho elementar. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, Brasília, p.1-20, 6 nov. 2016.

REDDY, J. N.. **An introduction to the Finite Element Method**. 3. ed. Nova York: Mcgraw-hill, 2006. 755 p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z.. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. **International Journal For Numerical Methods In Engineering**. Swansea, p. 337-357. 16 jan. 1987

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z.. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique. **International Journal For Numerical Methods In Engineering**. Swansea, p. 1331-1364. 29 ago. 1992.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z.. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: error estimates and adaptivity. **International Journal For Numerical Methods In Engineering**. Swansea, p. 1365-1382. 29 ago. 1992.

Recebido: 31 ago. 2017.

Aprovado: 02 out. 2017.

Como citar:

GASPAR, V. et al. Análise de metodologias de refino h-adaptativo em MEF utilizando estimativa pós-solução de erros de discretização em elasticidade unidimensional. In: SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DA UTFPR, 22., 2017, Londrina. **Anais eletrônicos...** Londrina: UTFPR, 2017. Disponível em: < <https://eventos.utfpr.edu.br/sicite/sicite2017/index>. Acesso em: XXX.

Correspondência:

Vinicius Gaspar

Rua Benjamin Constant, número 1985, Bairro Centro, Londrina, Paraná, Brasil.

Direito autoral:

Este resumo expandido está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição-Não Comercial 4.0 Internacional.

