# Métodos numéricos para a solução do sistema de equações de problemas não lineares de estruturas

**Johannes Hosp Porto**
johannes@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

**Luiz Antonio Farani de Souza**
lasouza@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

**Rodrigo dos Santos Veloso Martins**
rodrigomartins@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

**Juliana Castanon Xavier**
julianaxavier@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

## RESUMO

Nas simulações de problemas não lineares de estruturas num processo incremental e iterativo, resolver os sistemas de equações lineares gerados a cada iteração da formulação de Elementos Finitos é, em geral, o passo que demanda maior esforço computacional durante o processamento. Neste trabalho foram realizadas análises de problemas de treliças espaciais com comportamento não linear geométrico utilizando o Método dos Elementos Finitos Posicional. O problema estrutural não linear é solucionado por meio do método de Newton-Raphson padrão associado à técnica de continuação comprimento de arco linear. Algoritmos de métodos diretos e iterativos, para a solução de tais sistemas, foram implementados e analisados usando o *software* Scilab. Os resultados numéricos apontaram o melhor desempenho dos métodos iterativos quanto ao tempo de processamento na obtenção da solução aproximada do problema para dada tolerância.

**PALAVRAS-CHAVE:** Newton-Raphson. Gradiente Conjugado. Elementos Finitos Posicional.

## INTRODUÇÃO

Treliça espacial é uma estrutura rígida leve que consiste de barras e nós interligados em um padrão geométrico triangular. Esse tipo de estrutura é muito utilizado para cobrir grandes áreas abertas com pouco ou nenhum apoio interno. Aplicações bem sucedidas de sistemas estruturais treliçados abrangem estádios, edifícios públicos, centros de exposições, hangares de avião, pontes suspensas, entre outras. Dentre as vantagens da utilização dessas estruturas, destacam-se: a produção em larga escala, transporte fácil, montagem rápida, peso próprio relativamente baixo e aparência agradável (KADHUM, 2010). Uma forma comum de representação gráfica da resposta estática não linear de uma estrutura consiste no traçado da curva deslocamento versus força (trajetória de equilíbrio), em que a abscissa corresponde a uma componente de deslocamento de um nó selecionado, e a ordenada representa o parâmetro de força (RODRIGUES, 1997). Este trabalho apresenta um procedimento numérico para a análise estática estrutural de treliças espaciais com comportamento não linear geométrico.

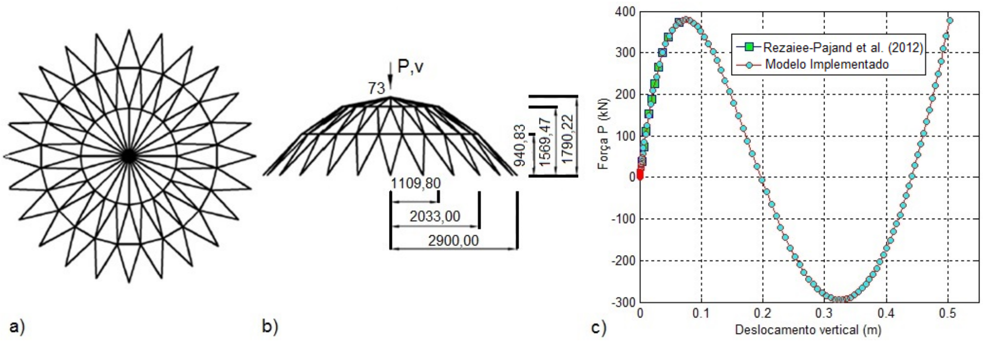
## METODOLOGIA

A solução não linear do problema estrutural é obtida por meio do método de Newton - Raphson (NR) associado à técnica de continuação controle de comprimento de arco linear. Na análise não linear, utiliza-se a formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional desenvolvida por Coda (2003). Classificada como uma formulação Lagrangeana Total, a formulação posicional é fundamentada no princípio da mínima energia potencial e as incógnitas fundamentais do problema são as posições nodais do elemento finito, ao invés dos deslocamentos que são as incógnitas no Método dos Elementos Finitos padrão para sólidos. Simulações em ambiente Scilab são realizadas com o propósito de comparar algoritmos de métodos iterativos (Gradiente Conjugado - GC, Gradiente Conjugado pré-condicionado - GCP e Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado - GCBE) e diretos (Fatoração LU e Eliminação de Gauss) encontrados na literatura, para a solução dos sistemas de equações lineares gerados da formulação de Elementos Finitos a cada iteração no processo incremental. O desempenho dos algoritmos é avaliado com base nos seguintes parâmetros obtidos das simulações: deslocamento vertical v num nó específico da treliça; tempo de processamento t (em segundos), passos de força (NP) e iterações acumuladas ($k_t$) até a convergência para a solução do problema com o método NR; e iterações acumuladas ($j_t$) dos métodos GC, GCP e GCBE.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considere a cúpula ilustrada nas Figuras 1a-b construída de aço com módulo de elasticidade longitudinal 206,0 GPa. A seção transversal de todas as barras é 2,16 x $10^{-4}$ $m^2$. Na base da treliça há apoios do tipo pino, e uma força vertical P é aplicada no ápice da mesma. Essa estrutura possui 73 nós, 168 elementos de barra e 147 graus de liberdade. No Quadro 1 são apresentados os resultados numéricos (NP, $k_t$, $j_t$, t e deslocamento vertical v no topo da cúpula) obtidos das análises com os métodos mencionados anteriormente. Os parâmetros considerados nas simulações são: comprimento de arco inicial $\Delta l$ = 0,01; número máximo de iterações em cada ciclo $i_{máx}$ = 100; número de iterações desejadas Nd = 3; tolerância tol = 1,0 x $10^{-6}$; e incremento de força $\Delta$P = 37,5 kN. As curvas deslocamento vertical no topo *versus* força obtidas com o algoritmo implementado são mostradas na Figura 1c com dois pontos limites de força, comparando-as com os resultados numéricos de Rezaiee-Pajand et al. (2012). As simulações efetuadas com os códigos desenvolvidos neste trabalho foram conduzidas para além dos pontos de equilíbrio obtidos por esses autores.

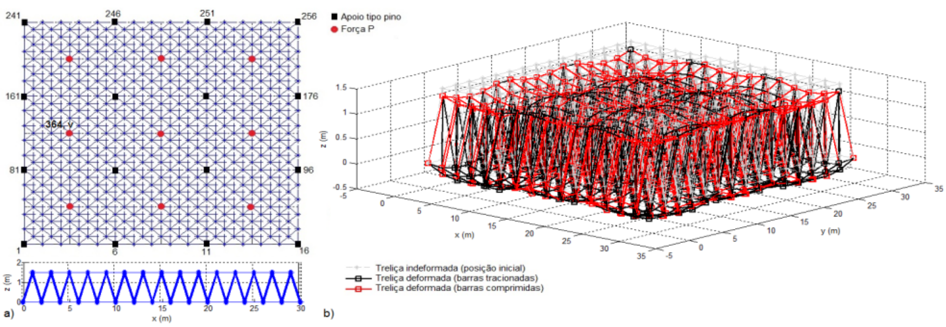
Figura 1 – Treliça espacial do tipo cúpula: a) vista superior; b) vista lateral; e c) trajetórias de equilíbrio.




Fonte: Próprios autores.

Na Figura 2a é apresentado o modelo estrutural de uma treliça espacial do tipo quadrado sobre quadrado, com módulos piramidais de 2,0 m x 2,0 m e altura de 1,5 m, sendo 15 módulos na direção do eixo x e 15 módulos na direção do eixo y, submetida a forças verticais (P) nos nós indicados. A estrutura possui 481 nós, 1800 elementos de barra e 1299 graus de liberdade. São consideradas barras de seção tubular vazada Φ76x2 nos banzos inferiores e Φ60x2 para as demais barras, com módulo de elasticidade longitudinal E = 200,0 GPa. Nas simulações são considerados os seguintes parâmetros: $\Delta$l = 0,5; Nd = 3; $i_{máx}$ = 100; $\Delta$P = 0,01 N; e tol = 1,0 x $10^{-6}$. Na Figura 2b são mostradas as configurações indeformada (posição inicial) e deformada (posição final) da treliça espacial, bem como a indicação das barras que estão tracionadas e comprimidas. Os resultados numéricos (NP, $k_t$, $j_t$, tempo e deslocamento vertical no nó 364) são apresentados no Quadro 2.

Figura 2 – Treliça espacial da cobertura: a) modelo estrutural; b) configurações indeformada e deformada.




Fonte: Próprios autores.

No segundo problema foi observada a melhor eficiência dos métodos iterativos (GC, GCP e GCBE) em comparação com os métodos diretos (Eliminação de Gauss e Fatoração LU). Os métodos iterativos requerem menos memória e possuem menor custo computacional em problemas de grandes dimensões. Verificou-se que as análises com o método iterativo GC apresentaram menor tempo de processamento (tempo de CPU). Apesar de serem necessárias menos iterações acumuladas ($j_t$) nas simulações com o método GCBE, o tempo de processamento para alcançar a solução dos problemas foi maior - a redução do número de iterações não compensou o custo computacional maior da iteração do método GCBE em relação à iteração do método GC. Pode-se acelerar a convergência do método GC utilizando-se pré-condicionadores. Nas simulações com o método GCP foi utilizado o pré-condicionador Diagonal ou de Jacobi, que é construído com os elementos da diagonal principal da matriz de rigidez **K** (ALMEIDA; PAIVA, 1999):

$$\mathbf{M} = \mathrm{diag}(K_{ii}), i = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

No segundo problema, a solução do problema com o método GCP foi alcançada com menos iterações em contraste com o método GC. Destaca-se o baixo custo na construção do pré-condicionador diagonal, uma vez que são utilizados somente os elementos da diagonal principal da matriz de rigidez. É importante salientar que a construção do pré-condicionador pode ser muito cara. Uma implementação cuidadosa deve ser feita a fim de obter resultados numéricos competitivos, tanto em relação à velocidade quanto à robustez.

Quadro 1 – Resultados numéricos do problema de cúpula.

| Método | NP | $k_t$ | $j_t$ | Tempo t (s) | v (mm) |
|---|---|---|---|---|---|
| Decomposição LU | 105 | 284 | - | 7,4656 | -502,7091 |
| Eliminação de Gauss | 105 | 284 | - | 11,8366 | -502,7091 |
| GC | 105 | 284 | 8716 | 3,5203 | -502,7091 |
| GCP | 105 | 284 | 10967 | 4,0709 | -502,7091 |
| GCBE | 105 | 284 | 7674 | 3,7720 | -502,7091 |

Fonte: Próprios autores.

Quadro 2 – Resultados numéricos do problema de cobertura.

| Método | NP | $k_t$ | $j_t$ | Tempo t (s) | v (m) |
|---|---|---|---|---|---|
| Decomposição LU | 14 | 42 | - | 487,5889 | -0,5548 |
| Eliminação de Gauss | 14 | 42 | - | 1095,4927 | -0,5548 |
| GC | 14 | 42 | 3618 | 18,8054 | -0,5548 |
| GCP | 14 | 42 | 3107 | 27,7209 | -0,5548 |
| GCBE | 14 | 42 | 2730 | 25,4040 | -0,5548 |

Fonte: Próprios autores.

## CONCLUSÃO

Nas simulações não lineares de problemas de estruturas num processo incremental e iterativo, resolver os sistemas de equações lineares gerados a cada iteração é, em geral, o passo que demanda maior esforço computacional durante o processamento. Mesmo com o impacto que o setor da microeletrônica tem causado no desenvolvido de componentes computacionais, com destaque a sistemas mais compactos de memória e processadores cada vez mais rápidos, ainda assim, essas poderosas máquinas - por si só - nem sempre conseguem tratar adequadamente diversos modelos estruturais, quer por falta de memória, quer por excessivo tempo de resposta. A partir dos resultados numéricos, este trabalho pretende auxiliar o projetista calculista na escolha do método de solução mais adequado para a solução de problemas de treliças com comportamento não linear. Como sugestão de pesquisa futura, sugerem-se: implementar outros pré-condicionadores, como por exemplo, Fatoração incompleta LU, Fatoração incompleta de Cholesky e Polinomial; estudar treliças com não linearidade física; e adequar o código implementado para estudos em análise dinâmica.

# Numerical methods for solving systems of equations in nonlinear structural problems


## ABSTRACT

Simulations of nonlinear structural problems using an iterative and incremental process give rise to linear systems of equations, which are generated at each step of the Finite Element formulation. In general, to solve these systems demands a high computational effort. In this work we analyze space trusses problems with geometric nonlinear behavior using the Positional Finite Element Method. The nonlinear structural problem is solved by the standard Newton-Raphson method associated with the linear arc-length path-following technique. Algorithms of direct and iterative methods for solving such systems are implemented and analyzed using the software Scilab. The numerical results show a better performance of the iterative methods in terms of processing time to obtain the approximate solution considering a given tolerance.


**KEYWORDS:** Newton-Raphson. Conjugated Gradient. Positional Finite Elements.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, V. S.; PAIVA, J. B. Aplicação do método dos gradientes conjugados com o uso de pré-condicionadores em problemas do MEF. In: XX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. São Paulo, 1999. **Anais...** São Paulo: Eds. P. M. Pimenta, R. M. L. R. F. Brasil, E. S. Almeida N., 1999.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF**. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

KADHUM, A. F. **Nonlinear Finite Element Analysis of Space Truss**. Anbar Journal for Engineering Sciences, 2010.

REZAIEE-PAJAND, M.; SARAFRAZI, S. R.; REZAIEE, H. Efficiency of dynamic relaxation methods in nonlinear analysis of truss and frame structures. **Computers and Structures**, v. 112-113, p. 295–310, 2012.

RODRIGUES, R. O. **Análise dinâmica bidimensional não linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado**. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1997.

**Recebido:** 31 ago. 2017.

**Aprovado:** 02 out. 2017.

**Como citar:**

PORTO, J. H. et al. Métodos numéricos para a solução do sistema de equações de problemas não lineares de estruturas. In: SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DA UTFPR, 22., 2017, Londrina. **Anais eletrônicos...** Londrina: UTFPR, 2017. Disponível em: <https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2017/index. Acesso em: XXX.

**Correspondência:**

Johannes Hosp Porto

Rua Marcílio Dias, 635, Apucarana, Paraná, Brasil.