# Algumas considerações sobre a distribuição de probabilidade alfa estável

**Nádia Schimomukai Minato**
nadiasminato@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR ,Cornélio Procópio, Paraná, Brasil

**Roberto Molina de Souza**
rmolinasouza@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR ,Cornélio Procópio, Paraná, Brasil

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar a construção das curvas da função densidade de probabilidade alfa estável a partir de uma revisão sobre o uso desta distribuição na literatura. As expressões apresentadas são baseadas nas séries *Fox H-functions*, que melhor descrevem as curvas da função densidade de probabilidade alfa estável a partir da variação de seus parâmetros. A distribuição alfa estável pode ser considerada uma alternativa à distribuição normal visto que, além da assimetria, a mesma ainda pode ser utilizada para variáveis aleatórias que apresentam distribuições com caudas pesadas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Alfa estável. Distribuições Assimétricas. Curtose.

## INTRODUÇÃO

A distribuição de probabilidade *tilted normal* proposta por Maiti e Dey (2012) e a distribuição de probabilidade Gama Generalizada Extendida proposta por Stacy (1962) apresentam um parâmetro a mais que a distribuição de probabilidade normal para poder contemplar uma possível assimetria positiva ou negativa. Sahu et al (2003), baseados na distribuição *skew normal* proposta por também apresentam uma distribuição assimétrica nesta mesma direção. No mesmo trabalho, Sahu et al (2003), baseados na distribuição *skew t*, apresentam uma distribuição assimétrica com caudas mais pesadas de acordo com os graus de liberdade da distribuição t de Student.

Finalmente, Buckle (1995) apresenta as distribuições estáveis sob o enfoque Bayesiano, baseada em um trabalho de Gnedenko e Kolmogorov (1954). As distribuições alfa estáveis apresentam 4 parâmetros, podendo assim descrever assimetria e curtose.

## DISTRIBUIÇÃO ALFA ESTÁVEL

A função densidade de probabilidade da distribuição alfa estável é descrita por Buckle (1995) a partir do seguinte teorema:

Teorema 1: Seja a função densidade de probabilidade bivariada de *Z* e *Y*, condicionada a $\alpha$ e $\beta$, $f\ :(-\infty,0)\times(-\frac{1}{2},I_{\alpha,\beta})\cup(0,\infty)\times(I_{\alpha,\beta},\frac{1}{2})$ é dado por:

$$f(z,y\,|\,\alpha,\beta)=\frac{\alpha}{|\alpha-1|}\exp\left\{-\left|\frac{z}{t_{\alpha,\beta}(y)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\right\}\left|\frac{z}{t_{\alpha,\beta}(y)}\right|^{\alpha/(\alpha-1)}\frac{1}{|z|},$$

em que

$$t_{\alpha,\beta}(y)=\left(\frac{sen\left[\pi\alpha y+\eta_{\alpha,\beta}\right]}{\cos\pi y}\right)\left(\frac{\cos\pi y}{\cos\left[\pi(\alpha-1)y+\eta_{\alpha,\beta}\right]}\right)^{(\alpha-1)/\alpha}$$

e $\alpha\in(0,1)\cup(1,2]$, $\beta\in[-1,1]$, $z\in(-\infty,\infty)$ e $y\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, com $\eta_{\alpha,\beta}=\beta\min(\alpha,2-\alpha)\frac{\pi}{2}$ e $I_{\alpha,\beta}=-\frac{\eta_{\alpha,\beta}}{\pi\alpha}$.

A prova do Teorema 1 é apresentado em Buckle (1995). Nesta distribuição de probabilidade, $\alpha$ é o parâmetro de curtose e $\beta$ de assimetria. Para $\alpha=2$ e $\beta=0$ tem-se a distribuição normal padrão como caso particular. Ainda, $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.

Como não é possível a obtenção de uma forma fechada para $f(z\,|\,y,\alpha,\beta)$ a partir da expressão apresentada no Teorema 1, o decaimento abrupto observado na Figura 1 (a), nas proximidades de $\mu$, em ambos os lados da função densidade, pode causar problemas na estimação dos parâmetros a partir da estratégia de integração numérica

Utilizando uma estratégia baseada na expansão da série *Fox H-function*, Otiniano et al (2013) e Rathie et al (2016), apresentam uma solução para o problema em questão. Eles dividem a função densidade em 4 partes, sendo a nova função densidade de probabilidade a reunião desta 4 funções parciais. Logo, para $1<\alpha\leq2$ tem-se:

$$f(x\,|\,\boldsymbol{\theta})=\begin{cases} f_1(x\,|\,\boldsymbol{\theta}), \text{se } x<a_1 \\ f_2(x\,|\,\boldsymbol{\theta}), \text{se } a_1\le x<\mu \\ f_3(x\,|\,\boldsymbol{\theta}), \text{se } \mu\le x<a_2 \\ f_4(x\,|\,\boldsymbol{\theta}), \text{se } x>a_2 \end{cases} \tag{1}$$

em que:

$$f_1(x\,|\,\boldsymbol{\theta})=\sum_{v=0}^{v_2}\frac{\sin\left[\frac{1}{2}\pi(2+v\alpha-\beta_2 v\alpha+2v\beta_2)\right](-1)^v\left[\frac{\sigma_2}{-(x-\mu)}\right]^{v\alpha}\Gamma(1+v\alpha)}{-(x-\mu)\pi\Gamma(v+1)} \tag{2}$$

$$f_2(x\,|\,\boldsymbol{\theta})=\sum_{v=0}^{v_1}\frac{\sin\left[\frac{1}{2}\frac{\pi(v+1)(\alpha-\beta_2\alpha+2\beta_2)}{\alpha}\right]\Gamma\left(\frac{v+1}{\alpha}\right)\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma_2}\right]^v}{\alpha\sigma_2\pi\Gamma(v+1)} \tag{3}$$

$$f_3(x\,|\,\boldsymbol{\theta})=\sum_{v=0}^{v_1}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\frac{\pi(v+1)(\alpha+\beta_2\alpha-2\beta_2)}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{v+1}{\alpha}\right)\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma_2}\right]^v}{\alpha\sigma_2\pi\Gamma(v+1)} \tag{4}$$

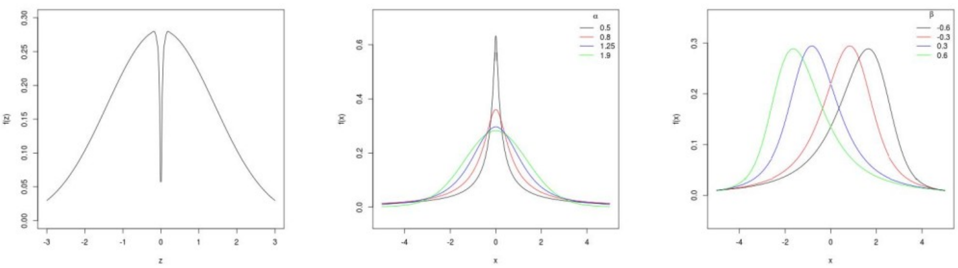
$$f_4(x\,|\,\boldsymbol{\theta})=\sum_{v=0}^{v_2}\frac{\sin\left[\frac{1}{2}\pi(2+v\alpha+\beta_2 v\alpha-2v\beta_2)\right](-1)^v\left[\frac{\sigma_2}{x-\mu}\right]^{v\alpha}\Gamma(1+v\alpha)}{(x-\mu)\pi\Gamma(v+1)} \tag{5}$$

em que $v_1$ e $v_2$ são definidos a partir de um estudo prévio das séries; $\sigma_2=\sigma\left[1+\beta^2\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2\alpha}}$; $\beta_2=\frac{2}{\pi(\alpha-2)}\arctan\left[\beta\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]$; $a_1$ e $a_2$ , que são pontos importantes responsáveis pelo corte na função, devem ser cuidadosamente obtidos a partir da análise do gráfico da $f(x\,|\,\boldsymbol{\theta})$. Para $0<\alpha<1$ as expressões são introduzidas em Otiniano et al (2013) e Rathie et al (2016).

## RESULTADOS

Nas Figuras 1 (b-c), tem-se um exemplo das expressões (2) a (5) reunidas, formando, no primeiro caso, as curvas com β=0 e variando α e, no segundo caso, fixando α=1,25 e variando β.

Figura 1: Representação da densidade de *f(z)* (a) e *f(x)* (b-d)




(a): α=2; β=0 (b): μ=0; σ=1; β=0 (c): μ=0; σ=1; α=1,25

Fonte: Os autores (2017)

## CONCLUSÕES

O uso da distribuição alfa estável pode contribuir na construção de modelos que sejam mais adequados na análise de dados, evitando assim que sejam assumidos muitos pressupostos. Como desafios e perspectivas futuras, pode-se considerar a estimação dos parâmetros a partir destas expressões e a aplicação desta distribuição na solução de problemas reais.

# Some considerations about alpha-stable distribution


**ABSTRACT**

The main goal of this work is to present the build of the curves of the alpha-stable distribution from a review on the use of this distribution in the literature. The expressions presented are based on the Fox H-functions series, which best describe the curves of the alpha-stable distribution from the variation of its parameters. The alpha-stable distribution can be considered an alternative to the normal distribution since, in addition to the asymmetry, it can still be used for random variables that have distributions with heavy tails.


**PALAVRAS-CHAVE:** Alpha-stable. Assimetric distribution. Curtosis.

## AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem a Fundação Araucária pelo fomento em forma de bolsa de Iniciação Científica para o primeiro autor.

## REFERÊNCIAS

BUCKLE, D.J., Bayesian Inference for Stable Distributions. **Journal of American Statistical Associaton.** v. 90, n. 430, p. 605-613, 1995.

GNEDENKO, B.V.; KOLMOGOROV, A.N., **Limit Distributions for sums independent random variables.** Cambridge, MA. Addison-Wesley, 1954.

MAITI, S.S.; DEY, M., Tilted Normal Distribution and Its Survival Properties. **Journal of Data Science.** v. 10, p. 225-240, 2012.

OTINIANO, C.E.G.; SOUSA, T.R.; RATHIE, P.N, Stable random variables: Convolution and reliability. **Journal of Computational and Applied Mathematics.** v. 242, p. 1-11, 2013.

RATHIE, P.N.; OZELIM, L.C.S.M.; OTINIANO, C.E.G., Exact distribution of the product and the quotient of two stable L´evy random variables. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.** v. 36, p. 204-2018, 2016.

SAHU, S.K.; DEY, D.K.; BRANCO, M.D., A new class of multivariate skew distributions with applications to bayesian regression models. **Canadian Journal of Statistics,** v. 31, n. 2, p. 129-150, 2003.

STACY, E.W., A generalization of the gamma distribution. **The Annals of Mathematical Statistics,** v. 33, n. 3, p. 1187-1192, 1962.

**Recebido:** 31 ago. 2017.

**Aprovado:** 02 out. 2017.

**Como citar:**

MINATO, N. S.; SOUZA, R. M.. Algumas considerações sobre a distribuição de probabilidade alfa estável. In: SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DA UTFPR, 22., 2017, Londrina. **Anais eletrônicos...** Londrina: UTFPR, 2017. Disponível em: <https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2017/index. Acesso em: XXX.

**Correspondência:**

Nádia Schimomukai Minato

Avenida Alberto Carazzai, 1640, Centro, Cornélio Procópio, PR, Brasil.