Otimização inteira: o problema do caixeiro viajante

André Luiz Atarasi
andre.atarasi@hotmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Londrina, PR, Brasil

Alireza Mohebi Ashtiani
ashtiani@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Londrina, PR, Brasil

RESUMO

O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) é um dos problemas mais estudados de Matemática que tem uma série de aplicações interessantes, pois muitos problemas reais podem ser modelados como um PCV ou como uma das suas variações. Devido à sua grande complexidade por ser um problema NP-completo, vários métodos aproximados como, por exemplo, heurísticas têm sido desenvolvidos ao longo das últimas décadas. A proposta deste trabalho é apresentar, modelar e resolver o problema do caixeiro viajante através de algum método heurística; buscar algumas aplicações do problema e, além disso, como uma aplicação bastante prática do dia a dia dos campi da UTFPR, resolver o problema para a distância percorrida pelos motoristas da UTFPR que isso traz economia do tempo e do recurso para a nossa instituição nesta época de crise do governo federal e em sequência para todas as instituições brasileiras como a UTFPR.

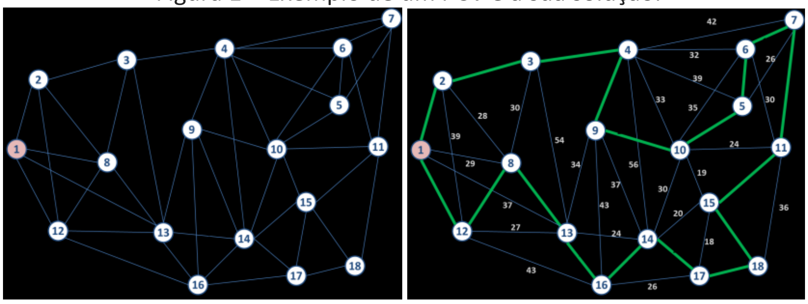
PALAVRAS-CHAVE: Otimização inteira. Problema do caixeiro viajante. Heurísticas. NP-completo.

INTRODUÇÃO

O Problema do Caixeiro Viajante (*Travelling Salesman Problem* - TSP) é um dos problemas mais estudados da Otimização Combinatória e da Teoria dos Grafos que tem uma série de aplicações interessantes, pois muitos problemas reais podem ser modelados como um PCV ou como uma das suas variações, como, por exemplo, Redes de autocarros (vans escolares), movimento de pessoas, materiais e veículos, reposicionamento de satélites, turismo, correios, empresas de valores, fabricação de placas de circuito eletrônico, raio-x cristalográfico (estudo de cristais), problema de ordem de recolhimento no depósito, sequenciamento do genoma, otimização da cadeia de digitalização, estudo de DNA, problema de rotas minimias entre os aeroportos, redes de fibras óticas, distribuição de cabos de força e entre outros (veja DALEM, 2004).

O PCV foi formulado matematicamente pela primeira vez em 1932 por Karl Menger (MENGER, 1932), mas foi a partir dos anos 50 que começou a ser fortemente estudado. A um caixeiro viajante é informado um conjunto de n cidades. Ele deve partir de uma cidade (inicial), passar por todas as demais cidades uma única vez e retornar à cidade inicial de tal forma que esta trajetória tenha o menor caminho possível (Figura 1).

Figura 1 – Exemplo de um PCV e a sua solução.



Se fossem poucas cidades, por exemplo, se o caixeiro tivesse que passar por apenas 3 capitais Rio de Janeiro, São Paulo e Curitiba (saindo do Rio de Janeiro), seria fácil descobri, pois teria 2 possíveis ordenações para percorrê-las. Porém se o caixeiro tivesse que passar por todas as 26 capitais nacionais, saindo, por exemplo, do Rio de Janeiro ele teria *25*! escolhas. Se tiver um computador super-veloz e levar apenas um segundo para calcular a distância total de cada um desses 25! percursos, gastaríamos 491.857.243.890.505.660 anos e como o universo tem aproximadamente 13 bilhões de anos, portanto, gastaríamos 37.835.172,61 vezes a idade do universo se for usar o método da força bruta! Observamos que apesar do seu simples enunciado, o PCV é um problema extremamente complexo. Na verdade, o PCV é um problema **NP-Completo**, isto é, não pode ser resolvido em tempo polinomial (GAREY; JOHSON, 1979).

Os poucos métodos exatos, baseados na técnica de enumeração, que encontram a solução ótima de um PCV são computacionalmente muito caros (BACH, 1996). Pelos testes realizados no **MATLAB**®, estima-se que o tempo computacional para n cidades será aproximadamente igual a n vezes o tempo computacional de execução do problema para $(n-1)$ cidades. O tempo estimado é dado por:

$$tempo_{est}(n) = \frac{k!}{n!} \, . \, tempo(k),$$

onde k é um valor para o qual o tempo de execução exata, $tempo(k)$, é conhecido. Portanto, o aumento no valor de n provoca um aumento muito significativo no tempo computacional.

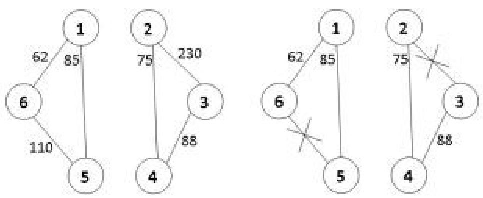
MODELAGEM DO PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

A construção do modelo matemático que representa a problema real em estudo, isto é, transformar um problema real e complexo, em forma de texto, em um problema matemática, onde possa ser resolvido de forma quantitativa é a parte de um problema de otimização. Considerando-se que a distância da cidade i à cidade j é igual da cidade j à cidade i, isto é, $d_{ij} = d_{ji}$ (PCV simétrico), o PCV pode ser formulado matematicamente através do seguinte modelo de programação linear inteira binária (zero-um):

$$\begin{aligned} &minimizar \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} d_{ij}\, x_{ij} \\ &sujeito\ a \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad para\ todo\ i = 1,2,\ldots,n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad para\ todo\ j = 1,2,\ldots,n \\ \displaystyle\sum_{i,j\in S} x_{ij} \le |S| - 1, \quad para\ qq\ subconjunto\ S\ de\ cidades \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

onde a função objetivo representa a distância total a ser minimizada, as duas primeiras restrições garantem que todas as cidades têm apenas uma antecessora e uma sucessora, a terceira restrição evita a formação de ciclos ou circuitos desconexos da origem (cidade inicial) para qualquer subconjunto S do conjunto de todas as cidades (Figura 2) e pela última restrição $x_{ij} = 1$ se o caixeiro sair da cidade i e for diretamente para j ou vice e versa. Por exemplo, no exemplo da Figura 1, $x_{48} = 0$ enquanto $x_{49} = 1$. Para iniciar a resolução, deve-se fazer $x_{ii} = +\infty$ para $i = 1,2,\ldots,n$ com o objetivo de eliminar as soluções sem sentido $x_{ii} = 1$.

Figura 2 – A funcionalidade da terceira restrição no Problema (1).

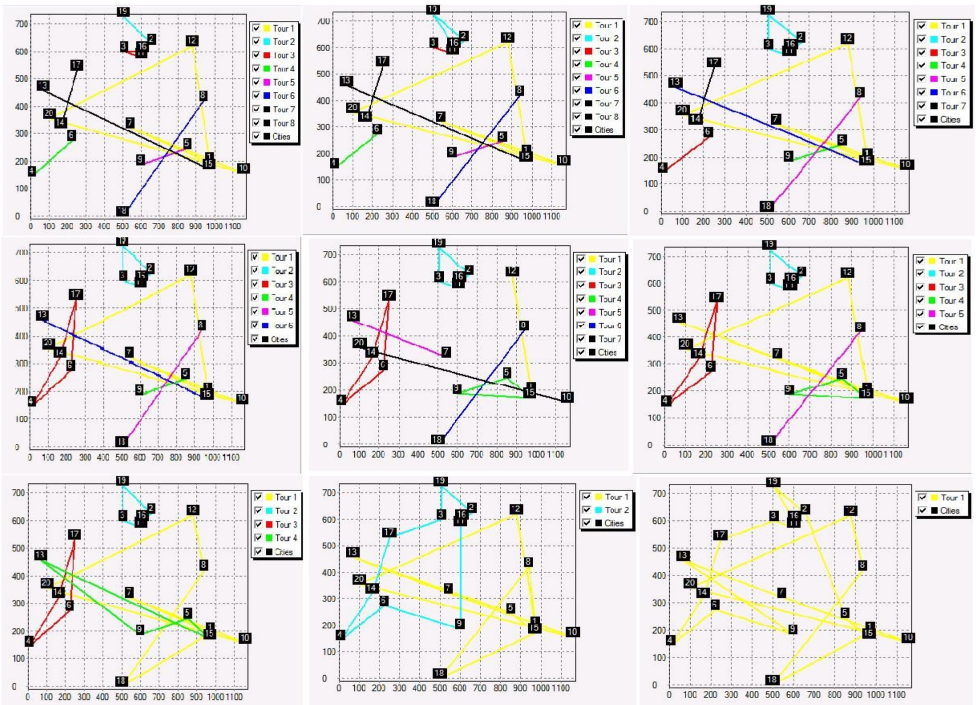


RESULTADOS E DISCUSSÕES

O problema foi implementado no solver **Xpress®** (IVE Versão 1.24.16), Free Academic Use, uma linguagem de programação super poderosa na área de otimização combinatória. Infelizmente, o solver Xpress não é gratuito, e a versão estudante é aplicável apenas a problemas com poucas variáveis (até 20)! O computador utilizado foi um Intel® Core™ Core2Duo 2,00 GB 2,00 GHz.

Problema 1 (20 Maiores Cidades do Paraná): como um exemplo prático considere o PCV para um caixeiro que deve passar pelas 20 maiores cidades paranaenses partindo de Curitiba. A Figura 3 representa a sequência das soluções geradas ao longo do processo. Em cada iteração, o método tenta eliminar os possíveis ciclos ou circuitos desconexos da origem (Curitiba)**.**

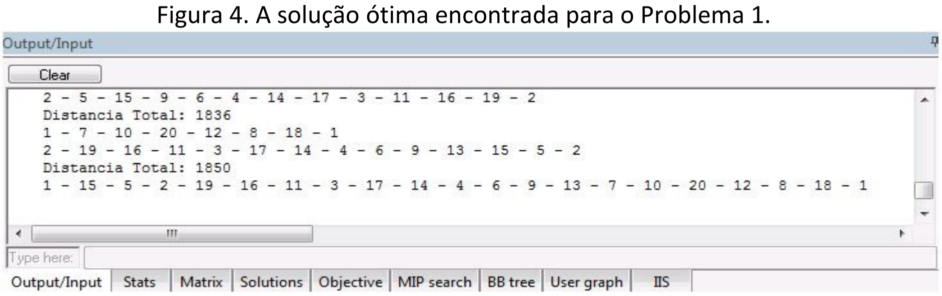
Figura 3. A sequência de soluções geradas na resolução do Problema 1.

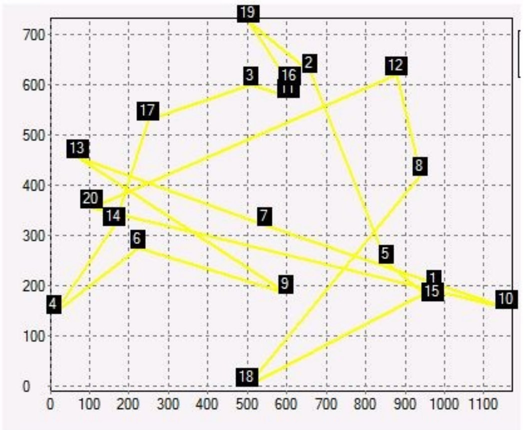


O último gráfico da Figura 3 (canto direito) representa a solução ótima indicando a sequência ótima de cidades (Figura 4). O tempo computacional necessário, CPU Time**,** para resolver o problema foi 5,47 segundos e o caminho ótimo com a menor distância (1850 km) foi dado por

1 Curitiba → *15 C. Largo* → *5 P. Grossa* → *2 Londrina* → *19 Cambé* → *16 Arapongas* → *11 Apucarana* →
3 Maringá → *17 Umurama* → *14 Toledo* → *4 Foz* → *6 Cascavel* → *9 Guarapuava* → *13 Araucária* →
7 São J.dos P. → *10 Paranaguá* → *20 Piraquara* → *12 Pinhais* → *8 Colombo* → *18 Alam.Tam* → *1 Curitiba*

Figura 4. A solução ótima encontrada para o Problema 1.

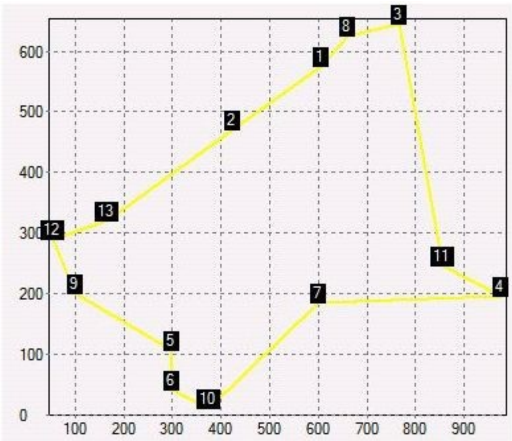




Problema 2 (O Problema do Zé – O motorista da UTFPR-LD): como um segundo exemplo bastante prático, vamos supor que o Zé (o motorsita da UTFPR-LD) queira sair de Londrina (com a van do campus), passando em cada campus da UTFPR uma única vez pegando um aluno em cada um. Neste tempo de crise é muito importante que ele economize tanto no tempo quanto no recurso utilizado (gasolina, pedágio, diária e etc.). A solução ótima (caminho ótimo) é dada na Figura 5. O tempo computacional, CPU Time, para resolver o problema foi 2,31 segundos e o caminho ótimo com a menor distância (1800 km) foi dado por:

$$\xrightarrow{8\ \mathrm{LD}}\xrightarrow[1\ \mathrm{AP}]{}\xrightarrow{2\ \mathrm{CM}}\xrightarrow[13\ \mathrm{TD}]{}\xrightarrow{12\ \mathrm{SH}}\xrightarrow[9\ \mathrm{MD}]{}\xrightarrow{5\ \mathrm{DV}}\xrightarrow[6\ \mathrm{FB}]{}\xrightarrow{10\ \mathrm{PB}}\xrightarrow[7\ \mathrm{GP}]{}\xrightarrow{4\ \mathrm{CT}}\xrightarrow[11\ \mathrm{PG}]{}\xrightarrow{3\ \mathrm{CP}}\xrightarrow[8\ \mathrm{LD}]{}$$

Figura 5. Solução ótima para o Problema do Zé – O Motorista da UTFPR-LD.



CONCLUSÕES

O PCV, apesar do seu simples enunciado, é bastante complexo e importante para a indústria e quem encontrar um método eficiente para resolvê-lo pode ganhar uma verdadeira fortuna! O obstáculo à resolução do problema é o crescimento exponencial do seu tempo computacional que isso torna inviável o uso das técnicas de enumerações das trajetórias. O PCV é um problema NP-completo e devido à sua complexidade computacional devemos buscar métodos alternativos que sejam viáveis computacionalmente e que gerem soluções próximas da solução ótima.

Integer optimization: the travelling salesman problem

ABSTRACT

The Travelling Salesman Problem (TSP) is one of most studied problems in Mathematics that has a number of interesting applications since many real problems can be modeled as a TSP or one of its variations. Due e to its NP-complete nature several approximate techniques, such as heuristics algorithms, have been developed during the last decades. The purpose of this work is to present, model and solve the TSP by using some heuristic algorithm, to look for some applications of the problem and, in addition, as a very practical of the day-to-day of the campuses of UTFPR, solve the problem for the distance traveled by the drivers of UTFPR that the solution saves the time and the resource for our institution in this time of crisis of the Brazilian Federal Government and in the sequence for all the Brazilian institutions like UTFPR.

KEYWORDS: Integer optimization. The travelling salesman problem. Heuristics. NP-complete.

AGRADECIMENTOS

O primeiro autor (André Luiz Atarasi) gostaria de agradecer a Fundação Araucária pela bolsa concedida e o Programa de Iniciação Cientifica da UTFPR pelo incentivo.

REFERÊNCIAS

BACH, T. **Evolutionary algorithms in theory and practice**. Oxford University Press, New York, 1996.

DELEM, K. Os Problemas do Milênio – **Sete Grandes Enigmas Matemáticos de Nosso Tempo**. Editora Record, 2004.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. (1979). **Computers and intractability: a Guide to the Theory of NP-Completeness**, Freeman, San Francisco, 1979.

MENGER, K. Das Botenproblem, **Ergebnisse Eines Mathematischen Kolloquiums**, V. 2, 1932, pp. 11-12, 1932.

Recebido: 31 ago. 2017.

Aprovado: 02 out. 2017.

Como citar:

ATARASI, A. L.; ASHTIANI, A. M. Otimização Inteira: O Problema do Caixeiro Viajante. In: SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DA UTFPR, 22., 2017, Londrina. **Anais eletrônicos...** Londrina: UTFPR, 2017. Disponível em: <https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2017/index. Acesso em: XXX.

Correspondência:

André Luiz Atarasi

Departamento de Engenharia de Materias, Estrada dos Pioneiros, 3131 - Centro, Londrina - PR, 86020-430, PR, Brasil.