



Solução Analítica Para A Equação De Biotransferência De Calor Com Parâmetros Variáveis

RESUMO

OBJETIVO: Resolver a equação de Pennes considerando a perfusão sanguínea e o calor gerado pelo metabolismo variáveis com a posição e comparar a temperatura obtida com a de um tecido saudável. **MÉTODOS:** Considerar este modelo em coordenadas cartesianas e em regime permanente, analisando o tecido em intervalos separados, para obter três equações mais simples de serem resolvidas. **RESULTADOS:** A equação foi resolvida, encontrando o perfil de temperatura para um tecido tumoral. Também foi possível encontrar o perfil de temperatura em um tecido saudável utilizando as mesmas análises, considerando que a espessura do tumor é nula. **CONCLUSÕES:** Observou-se um aumento na temperatura do tecido tumoral em relação ao tecido saudável, em aproximadamente $0,907^{\circ}\text{C}$.

PALAVRAS-CHAVE: Biotransferência de calor. Solução analítica. Tumor.

Matheus Haubert Yokomizo
matheus_hauberty@hotmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Gylles Ricardo Ströher
gylles@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Ricardo de Almeida Simon
ricardoalmeida@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

INTRODUÇÃO

Harry H. Pennes publicou em 1948 a primeira relação que quantifica o transporte de energia em tecidos vivos, considerando os efeitos do fluxo sanguíneo na temperatura tecidual. O modelo proposto por Pennes descreve os efeitos do metabolismo e da perfusão sanguínea no balanço de energia no interior dos tecidos biológicos por meio da equação (1),

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) + \rho_s w_s c_{ps} (T_a - T) + \dot{q}_{met}, \quad (1)$$

onde ρ é a massa específica do tecido [$\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$], c_p é o calor específico do tecido [$\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$], T é a temperatura do tecido [°C], t é o tempo [s], k é a condutividade térmica [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$], ρ_s é a massa específica do sangue [$\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$], w_s é a perfusão sanguínea [s^{-1}], c_{ps} é o calor específico do sangue [$\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$], T_a é a temperatura arterial [°C] que é considerado de aproximadamente 37°C e \dot{q}_{met} é a geração de calor metabólico [$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$].

Em determinadas partes do corpo humano a espessura do tecido é muito menor que as demais dimensões deste, podendo ser considerado um plano, por exemplo o tórax de um homem, ou seja, a equação se reduz a um problema unidimensional, com o calor fluindo na direção da espessura do tecido. Considerando que a temperatura do sangue que flui nas artérias é constante (T_a), que a troca de calor ocorre exclusivamente com o ambiente e que o sistema encontra-se em regime permanente, a equação (1) pode ser escrita como (HOSSAIN, MOHAMMADI, 2012)

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + \rho_s w_s c_{ps} (T_a - T(x)) + \dot{q}_{met} = 0, \quad (2)$$

sendo as condições de contorno dadas por (AHMED, KENGNE, SEMMAOUI, 2010; HOSSAIN, MOHAMMADI, 2012)

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0; \text{ e} \quad (3\text{-a})$$

$$k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h(T_\infty - T(L)), \quad (3\text{-b})$$

onde h é o coeficiente de transferência de calor por convecção da superfície da pele com o fluido ambiente [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{°C}^{-1}$], T_∞ é a temperatura ambiente [°C] e L é a espessura do tecido [m].

Em certas condições de anomalias, como no caso de um tumor, a perfusão sanguínea e o calor gerado pelo metabolismo são variáveis, ou seja, (FIGUEIREDO, GILMAR, 2014)

$$w_s = w_s(x), \text{ e} \quad (4)$$

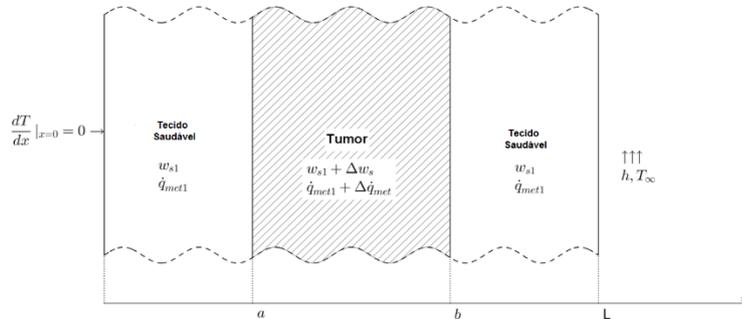
$$\dot{q}_{met} = \dot{q}_{met}(x). \quad (5)$$

O presente estudo objetiva analisar o perfil de temperatura de um tecido tumoral e comparando os resultados com os apresentados na literatura para um tecido saudável.

METODOLOGIA

Considerou-se um tecido de espessura L com um tumor definido em um intervalo $[a,b]$, como mostra a Figura1 a seguir.

Figura 1 – Modelo unidirecional de um tecido nas considerações dadas.



Fonte: Adaptado de FIGUEIREDO; GUIMARÃES (2014).

Inicialmente supõe-se uma perfusão sanguínea expressa da forma

$$w_s(x) = w_{s1} + \Delta w_s f(x), \quad (6)$$

e uma geração de calor da forma

$$\dot{q}_{met}(x) = \dot{q}_{met1} + \Delta \dot{q}_{met} f(x), \quad (7)$$

onde w_{s1} é a perfusão sanguínea no tecido saudável, Δw_s é a diferença entre a perfusão sanguínea de um tecido saudável e a perfusão sanguínea no tumor, \dot{q}_{met1} é a geração de calor em um tecido saudável, $\Delta \dot{q}_{met}$ é a diferença entre a geração de calor em um tecido saudável e a geração de calor em um tumor e $f(x)$ é uma função descrita por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8)$$

Substituindo (6) e (7) em (2) obtém-se

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - (A + Bf(x))T(x) = -(C + Df(x)), \quad (9)$$

sendo $A=(\rho_s \cdot c_{ps} \cdot w_{s1})/k$, $B=(\rho_s \cdot c_{ps} \cdot \Delta w_s)/k$, $C=(\rho_s \cdot c_{ps} \cdot w_{s1} \cdot T_a + \dot{q}_{met1})/k$ e $D=(\rho_s \cdot c_{ps} \cdot \Delta w_s \cdot T_a + \Delta \dot{q}_{met1})/k$.

Para encontrar a solução separou-se esta equação em três intervalos: $[0,a)$, $[a,b]$ e $(b,L]$. Obtendo, assim, a seguinte solução geral

$$T(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{A}x} + c_2 e^{-\sqrt{A}x} + \frac{C}{A}, & \text{se } 0 \leq x < a \\ c_3 e^{\sqrt{A+B}x} + c_4 e^{-\sqrt{A+B}x} + \frac{C+D}{A+B}, & \text{se } a \leq x \leq b. \\ c_5 e^{\sqrt{A}x} + c_6 e^{-\sqrt{A}x} + \frac{C}{A}, & \text{se } b < x \leq L \end{cases} \quad (10)$$

onde c_1 a c_6 são constantes que podem ser encontradas pelas condições (3) e ressaltando que tanto a função quanto sua primeira derivada são contínuas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

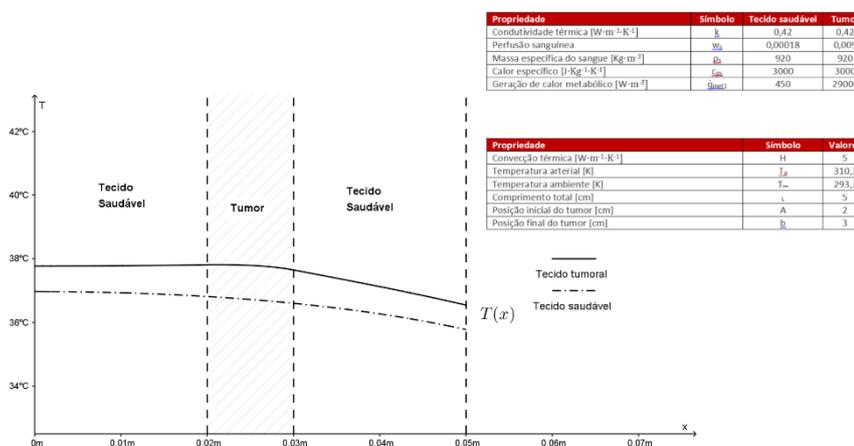
Para propósitos de comparação dos resultados obtidos, utilizou-se os valores das propriedades apresentados por Figueiredo e Guimarães (2014), conforme

Quadro 1 e Quadro 2, e a equação do perfil de temperatura em um tecido saudável, que foi obtida considerando que o tamanho do tumor é nulo, ou seja, $a=b$ e $B=D=0$, este perfil é dado pela equação

$$T(x) = \frac{\frac{h}{k} \left(T_{\infty} - \frac{C}{A} \right) \cosh(\sqrt{A}x)}{\sqrt{A} \sinh(\sqrt{A}L) + \frac{h}{k} \cosh(\sqrt{A}L)} + \frac{C}{A}. \quad (11)$$

A Figura 2 a seguir apresenta o perfil de temperatura de um tecido saudável e de um tecido com tumor.

Figura 2- Perfil de temperatura de um tecido saudável e de um tecido com tumor. Os valores dos parâmetros utilizados estão apresentados na figura, conforme Figueiredo e Guimarães (2014).



Fonte: Autoria própria (2017).

Observa-se que a temperatura em um tecido com tumor é maior que a temperatura em um tecido saudável, apresentando, neste caso, uma temperatura média de 37,515°C no tecido com tumor e 36,608°C no tecido saudável.

Também foi possível verificar que o resultado do perfil de temperatura em um tecido saudável concorda satisfatoriamente com o resultado obtido por Hossain e Mohammadi (2012), que apresentam o mesmo resultado apresentado pela equação (11).

CONCLUSÃO

O modelo térmico de Pennes unidimensional e em regime permanente foi resolvido analiticamente para o caso em que a pele humana possui uma região afetada com um melanoma. Nas condições exploradas, a solução do modelo mostrou um aumento de cerca de 0,907°C na temperatura média de um tecido tumoral em relação a um tecido saudável. Também foi verificado que a solução descreve o perfil de temperatura de um tecido saudável, sendo necessário considerar que o comprimento total do tumor é nulo. Ainda pretende-se estender as análises por meio de aproximações usando-se o método de perturbações para comparar os resultados obtidos.

Analytical solution for the bio-heat transfer equation in a tumor tissue

ABSTRACT

OBJECTIVE: To solve the equation of Pennes considering blood perfusion and heat generated by metabolism variables and compare the temperature obtained with that of healthy tissue. **METHODS:** To consider this model in cartesian coordinates and in steady-state, analyzing the tissue in separate intervals, to obtain three simpler equations to be solved. **RESULTS:** The equation was solved, finding the temperature profile for a tumor tissue. It was also possible to find the temperature profile in a healthy tissue using the same analyzes, only considering that the thickness of the tumor is zero. **CONCLUSIONS:** An increase in the temperature of the tumor tissue was observed in relation to the healthy tissue, at approximately 0.907°C. It was also found that this result describes the temperature profile in a healthy tissue, when considering a tumor of zero thickness.

KEYWORDS: Bio-heat transfer. Analytical solution. Tumor.

REFERÊNCIAS

AHMED, L.; KENGNE, E.; SEMMAOUI, H. **Modifed Pennes' Equation Modelling Bio-Heat Transfer in Living Tissues: Analytical and Numerical Analysis.** Natural Science. [S. l.], p. 1375-1385. out. 2010.

FIGUEIREDO, A. A. A.; GILMAR, G. **Análise Numérica da Equação da Biotransferência de Calor.** Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Uberlândia. 2014.

HOSSAIN, S.; MOHAMMADI, F. A. Development of an Estimation Method for Interior Temperature Distribution in Live Biological Tissues of Different Organs. **International Journal Of Engineering And Applied Sciences.** [s. l.], p. 45-58. 2012.

PENNES, H. H. Analysis of Tissue and Arterial Blood Temperatures in the Resting Human Forearm. **Journal Of Applied Physiology.** [S. l.], p. 93-122. ago. 1948.

Recebido: 31 ago. 2017.

Aprovado: 02 out. 2017.

Como citar:

YOKOMIZO, M. H.; STROHER, G. R.; SIMON, R. A. Solução Analítica Para A Equação De Biotranferência De Calor Com Parâmetros Variáveis. In: SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DA UTFPR, 22., 2017, Londrina. **Anais eletrônicos...** Londrina: UTFPR, 2017. Disponível em: <<https://eventos.utfpr.edu.br/sicite/sicite2017/index>>. Acesso em: XXX.

Correspondência:

Matheus Haubert Yokomizo
Rua Marçílio Dias, número 635, Bairro Jardim Paraíso, Apucarana, Paraná, Brasil.

Direito autoral:

Este resumo expandido está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição-Não Comercial 4.0 Internacional.

