Uma aplicação do teorema do ponto fixo de Banach

Marcela Alves Domingues
marceladomingues@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Guarapuava, Paraná, Brasil.

Juliano dos Santos Gonschorowski
julianod@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Guarapuava, Paraná, Brasil.

RESUMO

A análise funcional é uma evolução da análise clássica que tem como principal objeto de estudo espaços de funções e suas estruturas. Com o desenvolvimento desta teoria no século XX ela acabou se tornando uma ferramenta importante na matemática pura para resolver problemas em diferentes áreas. Uma de suas aplicações acontece na teoria das equações diferenciais na qual é possível provar o teorema de existência e unicidade para uma equação genérica do tipo $x'=f(t,x)$, exigindo que o campo f seja Lipschitz na segunda variável, uma condição mais fraca do que ter derivada parcial contínua na segunda variável. Para isto é utilizado o teorema do ponto fixo de Banach que garante a existência de um ponto fixo para um operador definido em um espaço normado completo.

PALAVRAS-CHAVE: Análise Funcional. Teorema do ponto fixo. Teorema de Picard.

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional é um ramo da matemática que se originou a partir da análise clássica. Seu desenvolvimento começou cerca de 90 anos atrás e atualmente os métodos resultantes desta teoria são amplamente utilizados na matemática e suas aplicações. Seu estudo começou quando os matemáticos observaram que problemas provenientes de diferentes áreas muitas vezes tinham características e propriedades similares levando-os a procurar abordagens abstratas que pudessem resolvê-los. Assim a Análise Funcional se revelou uma ferramenta poderosa em áreas como álgebra linear, equações diferenciais e integrais, cálculo variacional e teoria de aproximações.

Para o desenvolvimento do trabalho foi utilizado como principal referência o livro de Erwin Kreyszig [1], que faz parte de bibliografias básicas de cursos de Análise Funcional para cursos de pós-graduação na área de matemática, em paralelo foi utilizado um livro sobre espaços métricos [2]. Primeiro foram estudados os resultados envolvendo espaços de Banach e Hilbert e posteriormente algumas aplicações. Uma destas aplicações é a demonstração do Teorema de Picard usando o teorema do ponto fixo de Banach.

METODOLOGIA

Semanalmente foram apresentados seminários nos quais se discutiam os conceitos, exemplos e demonstrações de teoremas que compõe a teoria de Análise Funcional.

Utilizando o livro base, foi feito um estudo sobre os espaços métricos e os espaços vetoriais cuja métrica é induzida pela norma - os espaços normados. Posteriormente foram estudados os espaços de Banach e Hilbert e o teorema de ponto fixo de Banach, que desempenham um papel central, nesta teoria.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Primeiramente é importante compreender alguns conceitos para, posteriormente, poder enunciar os teoremas e prová-los. O primeiro conceito é sobre espaço métrico.

Definição (Espaço métrico) - A métrica sobre um conjunto é uma função d que associa cada par ordenado de elementos x,y $\in$ M a um número real d(x,y), chamado de distância entre x a y, de modo que são satisfeitas as seguintes propriedades:

1) $d(x,x) = 0$;
2) Se $x \neq y$ então $d > 0$;
3) $d(x,y) = d(y,x)$;
4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

A propriedade 4) é chamada de desigualdade triangular.

O conceito de espaço métrico é dado como um par (X,d), onde X é um conjunto e d é uma métrica sobre o conjunto, ou seja, uma função que mede a distância entre dois elementos que pertencem ao conjunto X, tal que ele satisfaz as propriedades mencionadas.

Agora será definido o conceito de sequência de Cauchy:

Definição (Sequência de Cauchy, Espaço completo) - Uma sequência (x_n) em um espaço métrico X = (X,d) é dita ser de Cauchy se para cada ε > 0 existir um N= N(ε) tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

O espaço X é dito ser completo se toda sequência de Cauchy em X converge.

Definição (Espaço Normado, Espaço de Banach) - Um espaço normado X é um espaço vetorial com uma norma definida nele. E um espaço de Banach é um espaço normado completo.

Exemplo 1: Espaço l^2(espaço de sequências). Cada elemento desse espaço é uma sequência x = (x_j) = (x_1, x_2, ...) de números, tal que $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots$ converge. A sua métrica é dada por

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^2\right)^{1/2}.$$

A sua norma é dada por

$$||x|| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{1/2}.$$

Esse espaço é completo. Portanto, ele é um espaço de Banach.

O próximo exemplo mostra que a escolha da métrica é crucial para determinar a completude do espaço, neste caso uma métrica definida por uma integral torna o conjunto do exemplo anterior um espaço que não é de Banach.

Exemplo 2: Funções contínuas. Seja X o conjunto de todas as funções reais contínuas em J =[0,1], e seja sua métrica definida por

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt.$$

E sua norma

$$||x|| = \int_0^1 |x(t)|\, dt.$$

Esse espaço métrico não é completo.

Demonstração: Vamos mostrar que podemos construir uma sequência de Cauchy que não converge para um elemento do espaço. Sejam as funções x_m definidas por:

$x_m(t)$= 0 se t ∈ $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ e $x_m(t)$= 1 se t ∈ $[a_m, 1]$, onde $a_m = \frac{1}{2} + 1/m$.

Esta sequência é de Cauchy e para cada x ∈ X,

$$\mathrm{d}(x_m, x) = \int_0^1 |x_m(t) - x(t)|\, dt =$$

$$= \int_0^{1/2} |x(t)|\, dt + \int_{1/2}^{a_m} |x_m(t) - x(t)|\, dt + \int_{a_m}^{1} |1 - x(t)|\, dt.$$

Assim (x_m) converge para $x(t)$ definida:

$$x(t)\text{= 0 se t} \in \left[0,\tfrac{1}{2}\right] \text{ e } x(t)\text{= 1 se t} \in [1/2, 1].$$

Mas este limite não é uma função contínua, então (x_m) não converge, isto é, não tem limite em X. Isso prova que X não é completo. O que implica que X não é um espaço de Banach.

Definição (Ponto Fixo) - Um ponto fixo de uma função T: X→ X de um conjunto X é um x ∈ X que é aplicado nele mesmo, ou seja

$$Tx = x.$$

Exemplo 3: Translações não possuem pontos fixos enquanto que uma rotação em torno de um ponto x possui apenas um ponto fixo, já a aplicação $f(x)=x^2$ definida no intervalo [0,1] tem dois pontos fixos o 0 e o 1.

Definição (Contração) - Seja X= (X,d) um espaço métrico. Uma função T: X →X é chamada contração em X se existir um número real, positivo $\alpha < 1$ tal que para todos x, y ∈ X,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y).$$

Teorema do Ponto Fixo de Banach - Considere um espaço métrico X = (X,d), onde $X \neq \emptyset$. Suponha que X é completo e seja T: X →X uma contração em X. Então T tem, precisamente, um ponto fixo.

Demonstração: Para provar esse teorema, será construído uma sequência (xn) e mostrar que é de Cauchy e que ela converge para o espaço X, e então provar que o limite x é um ponto fixo de T e T não tem outros pontos fixos.

De fato, escolha qualquer elemento x_0 pertencente a X e defina uma sequência iterativa (x_n) por

$$x_0,\ x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1 = T^2x_0\ ...,\ x_n = T^n x_0\ ,\ ...$$

Então, pela definição de contração, e pela hipótese do teorema,

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(Tx_m, Tx_{m-1}) \leq \alpha d(x_m, x_{m-1})\ ,...\ , \leq\ \alpha^m d(x_1, x_0).$$

Então, utilizando a desigualdade triangular e a fórmula da soma de uma progressão geométrica no final, temos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_{m+1}) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ ... + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1})\, d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha}\, d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

E como $0 < \alpha < 1$, no numerador temos $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Assim,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\, d(x_0, x_1).$$

Como $d(x_0, x_1)$ está fixo, podemos fazer o lado direito tão pequeno quanto queira com o m suficientemente grande. Logo, prova que a sequência é de Cauchy. Como X é completo, a sequência (x_m) converge. Agora iremos mostrar que o limite x é um ponto fixo da função T.

Usando a desigualdade triangular e de contração, temos

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x). \end{aligned}$$

Podemos assumir a soma da segunda linha tão pequena quanto se queira, pois a sequência (x_m) converge para x. O que conclui que d(x, Tx) = 0, tal que x =

Tx. Isso prova que x é um ponto fixo de T. E x é único porque Tx = x e $T\tilde{x} = \tilde{x}$, então

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leq \alpha d(x, \tilde{x})$$

isto implica que $d(x, \tilde{x}) = 0$, então $x = \tilde{x}$. O que completa a prova.

Agora considere uma equação diferencial ordinária

$$x' = f(t,x)$$

e uma condição inicial

$$x(t_0) = x_0.$$

Agora apresentamos uma aplicação do teorema do ponto fixo de Banach na teoria de equações diferenciais.

Teorema de Existência e Unicidade de Picard (para EDO's) - Seja f contínua no retângulo R = {(t,x)| |t - t_0| ≤ a, |x - x_0| ≤ b}, e assim limitada em R

$$|f(t,x)| \leq c.$$

Suponha que f satisfaz a condição de Lipschitz em R, isto é, existe uma constante k tal que para (t,x), (t,v) ∈ R,

$$|f(t,x) - f(t,v)| \leq k\,|x - v|.$$

Então o problema de valor inicial tem uma única solução.

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foram estudados resultados da análise funcional que se mostraram muito uteis no desenvolvimento da teoria de equações diferenciais, através deles foi possível demonstrar o teorema de existência e unicidade conhecido por teorema de Picard.

Como trabalhos futuros pretende-se estudar outros teoremas da análise funcional como, por exemplo, o teorema de Hanh-Banach que possui aplicações em equações integrais e equações diferenciais parciais e o teorema de Banach-Steinhaus, conhecido como teorema da limitação uniforme.

An application of the Banach's fixed point theorem

ABSTRACT

Functional analysis is an evolution of classical analysis whose main object is to study spaces of functions and their structures. With the development of this theory in the twentieth century it has become an important tool in pure mathematics to solve problems in different areas. One of its applications happens in the theory of differential equations in which it is possible to prove the existence and uniqueness theorem for a generic equation of type x '= f (t, x), requiring that the field f be Lipschitz in the second variable, a condition Weaker than having continuous partial derivative in the second variable. In order to prove that the Banach fixed point theorem is used which guarantees the existence of a fixed point for an operator defined in a complete normed space.

PALAVRAS-CHAVE: Functional Analysis. Banach's fixed point theorem, Picard's theorem.

REFERÊNCIAS

[1] KREYSIG, Erwin. Introductory functional analysis with applications,. United States of America, 1978.

[2] LIMA, Elon Lages. Espaços métricos. Rio de Janeiro, 1977.

Recebido: 31 ago. 2017.

Aprovado: 02 out. 2017.

Como citar:

DOMINGUES, M. A., GONSCHOROWSKI, J. S., Aplicação do teorema do ponto fixo de Banach. In: SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DA UTFPR, 22., 2017, Londrina. **Anais eletrônicos.** Londrina: UTFPR, 2017. Disponível em: <https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2017/index. Acesso em: XXX.

Correspondência:

Marcela Alves Domingues

Rua Romeu Karpinski Rocha, número 3632, Bairro Bonsucesso, Guarapuava, Paraná, Brasil.