Coloração total distinta na vizinhança em grafos 4-partidos completos

Matheus Scaketti
mts.scaketti@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, PR, Brasil

Sheila Morais de Almeida
sheilaalmeida@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, PR, Brasil

RESUMO

OBJETIVO: Encontrar um limite superior justo para o número cromático total distinto na vizinhança para os grafos 4-partidos completos. **MÉTODOS:** Utilizou-se o método indutivo hipotético para criação de limites superiores justos para o número cromático TDV de grafos 4-partidos completos com base nas observações dos resultados obtidos anteriormente para grafos tripartidos completos. Utilizou-se o método dedutivo para a prova das hipóteses levantadas. **RESULTADOS:** Se G é um grafo 4-partido completo, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$. **CONCLUSÕES:** Determinou-se o número cromático TDV para todos os grafos 4-partidos completos que possuem vértices adjacentes de grau máximo.

PALAVRAS-CHAVE: 4-partidos completos. Coloração total distinta na vizinhança. Número cromático total distinto na vizinhança.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho os grafos considerados são simples e conexos. Um grafo G com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$ é denotado por $G = (V(G), E(G))$. Os elementos de um grafo são seus vértices e arestas. Dois elementos são adjacentes se são dois vértices conectados por uma aresta, duas arestas incidentes no mesmo vértice ou uma aresta e o vértice em que ela incide. Um conjunto independente é um conjunto de vértices dois a dois não adjacentes. Uma coloração total é uma coloração dos elementos de G, tal que quaisquer dois elementos adjacentes têm cores distintas. O menor número de cores que permite uma coloração total de G é o número cromático total de G, denotado por $\chi''(G)$. Dado um grafo G, com uma coloração total, o conjunto de cores de um vértice u é chamado de rótulo de u, e é composto pela cor do vértice u e pela cor das arestas que incidem no mesmo. Uma coloração total distinta na vizinhança (coloração TDV) é uma coloração total própria, onde os rótulos de quaisquer dois vértices adjacentes são distintos. O Problema da Coloração TDV consiste em determinar, para um dado grafo G, o menor número de cores que permita uma coloração TDV de G. Esse número de cores é chamado de número cromático TDV e é denotado por $\chi_a''(G)$.

Seja $\Delta(G)$ o maior grau de um vértice de G. Zhang et al.(2005, p. 289) introduziu o Problema da Coloração TDV e apresentaram a seguinte conjectura.

Conjectura 1. (ZHANG, 2005, p. 299) *Se G é um grafo simples, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G)+3$.*

No mesmo trabalho, Zhang et al.(2005, p. 297) também apresentaram o seguinte limite superior para o número cromático TDV.

Teorema 2. (ZHANG, 2005, p. 297) *Se G é um grafo simples com vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) \geq \Delta(G)+2$.*

Neste trabalho apresentamos resultados sobre o Problema da Coloração TDV em um subconjunto dos grafos k-partidos completos. Os grafos k-partidos são aqueles cujo conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes. Se existe aresta entre quaisquer dois vértices em partes distintas então o grafo é chamado de k-partido completo. Um grafo 2-partido completo com partes de tamanhos m e n é chamado de bipartido completo e denotado por $K_{m,n}$. Dado um grafo k-partido completo, se todas as partes têm o mesmo tamanho, então G é chamado k-equipartido completo. O teorema a seguir valida a Conjectura 1 para os k-equipartidos completos.

Teorema 3. (LUIZ, 2014, p. 84) *Seja G um grafo k-equipartido completo, com partes de tamanho $r \geq 2$ e $k \geq 2$. Se rk é par, então $\chi''_a(G) = \Delta(G)+2$. Se rk é ímpar, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G)+3$.*

Para os grafos bipartidos completos, $K_{m,n}$, Zhang (2005) provou que $\chi''_a(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n})+1$ quando $1 < n < m$, e $\chi''_a(K_{m,n}) = \Delta(G)+2$ caso contrário. Para os grafos tripartidos completos, a Conjectura 1 foi provada por Luiz (2014). Luiz (2014) mostrou que $\chi''_a(G) \leq \Delta(G)+2$, quando G é um tripartido completo sem vértices adjacentes de grau máximo e que $\chi''_a(G) = \Delta(G)+2$ quando o grafo tripartido completo tem partição $[A,B,C]$ onde $|A| \geq 2|B| = 2|C|$. Tiburcio (2016) provou que $\chi''_a(G) \leq \Delta(G)+2$ para todos os tripartidos completos, melhorando o limite superior conhecido para o número cromático TDV da classe. Neste trabalho provamos que $\chi''_a(G) \leq \Delta(G)+2$ para todos os grafos *4*-partidos completos.

DEFINIÇÕES E RESULTADOS ANTERIORES

As definições e teoremas desta seção são importantes para a construção dos resultados que serão apresentados.

Um emparelhamento *M* é um conjunto de arestas do grafo *G* onde todo vértice $u \in V(G)$ incide em no máximo uma aresta de *M*. Um emparelhamento é maximal quando não está propriamente contido em outro emparelhamento. Um emparelhamento é perfeito quando em cada vértice do grafo *G* incide uma aresta do emparelhamento. Uma coloração de arestas é uma atribuição de cores para as arestas de um grafo *G* tal que quaisquer duas arestas adjacentes têm cores distintas. O menor número de cores que permite uma coloração de arestas é o índice cromático de *G*, denotado por $\chi'(G)$. Dado um grafo *G* e um subconjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, o subgrafo de *G* induzido por *X*, denotado por $G[X]$, é o subgrafo *H* com $V(H) = X$ e $E(H) = \{uv: u \in X \wedge v \in X \wedge uv \in E(G)\}$. O núcleo de um grafo *G* é o conjunto de vértices com grau máximo em *G*. O subgrafo de *G* induzido pelo núcleo é denotado por G_Δ.

Teorema 4. (VIZING, 1965) *Seja G um grafo simples. Se* $E(G_\Delta)$ *é vazio, então* $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Em 1989, Yap (1989) determinou um limite superior para o número cromático total de todos os grafos *k*-partidos completos.

Teorema 5. (YAP, 1989) *Se G é um grafo k-partido completo, então* $\chi''(G) \leq \Delta(G)+2$.

RESULTADOS

Nesta seção provamos que o número cromático TDV dos *4*-partidos completos é limitado superiormente por $\Delta(G)+2$. A demonstração foi dividida em casos, de acordo com o tamanho de cada parte. É suficiente considerar os casos em que o grafo tem partes de tamanhos diferentes, pois grafos *4*-equipartidos completos têm ordem par e a solução é dada pelo Teorema 3. Se as cardinalidades das partes do grafo *k*-partido completo *G* são duas a duas distintas, então qualquer coloração total de *G* é uma coloração TDV, já que os conjuntos de cores de vértices adjacentes se distinguem por sua cardinalidade. Pelo Teorema 5, conclui-se o seguinte resultado.

Teorema 6. *Se G é um grafo k-partido completo cujas as cardinalidades das partes são duas a duas distintas, então* $\chi''_a(G) \leq \Delta(G)+2$.

Então resta considerar os casos em que nem todas as partes têm o mesmo tamanho e nem todas as partes têm tamanhos diferentes. Os Lemas a seguir consideram grafos 4-partidos completo com partição $[A, B, C, D]$.

Lema 7. *Se |A| = |B| = |C| = |D|-1, então $\chi_a''(G) = \Delta(G)+2$.*

Prova. Faça um emparelhamento perfeito M_{BC} em $G[B \cup C]$. Pinte as arestas de M_{BC} com a cor $\Delta(G)+1$. Considere o grafo $G\setminus M_{BC}$. Note que agora a parte A é o núcleo do grafo e, pelo Teorema 4, é possível colorir as arestas de $G\setminus M_{BC}$com $\Delta(G)$ cores. Observe que $|V(G)| = 4|A|+1$é ímpar. Como o número de vértices é ímpar, em qualquer coloração de arestas de $G\setminus M_{BC}$, cada cor incide em no máximo $|V(G)|-1$ vértices. Como foram usadas $\Delta(G)$ cores, cada uma delas falta em algum vértice. Como existem $\Delta(G)$ vértices com grau igual a $\Delta(G)-1$ em $G\setminus M_{BC}$, em cada um deles falta uma cor. Então, as cores que faltam em dois vértices quaisquer de $G\setminus M_{BC}$são duas a duas distintas. Pinte os vértices de B,Ce D com as cores que faltam nesses vértices. Faça um emparelhamento maximal M_{CD} em $G[C \cup D]$ recolorindo as arestas de M_{CD}com cor $\Delta(G)+2$. Pinte os vértices de A com a cor $\Delta(G)+2$. Essa é uma coloração TDV do grafo G: os rótulos dos vértices de Dse distinguem dos demais por sua cardinalidade; os rótulos dos vértices de C são os únicos que têm tanto a cor $\Delta(G)+1$quanto a cor $\Delta(G)+2$; os rótulos dos vértices de B são os únicos que têm a cor $\Delta(G)+1$ e não têm a cor $\Delta(G)+2$; e os rótulos dos vértices de A têm a cor $\Delta(G)+2$ tal como em D, mas têm cardinalidades diferentes. □

Lema 8. Se |A| = |B| < |C| ≤ |D|, então $\chi_a''(G) = \Delta(G)+2$.

Prova. Faça um emparelhamento maximal M_{BD} em $G[B \cup D]$ e pinte com cor $\Delta(G)+2$. Como $|B|<|D|$, existe um conjunto T de vértices onde não incidem arestas de M_{BD}. Pinte os vértices de Tcom cor $\Delta(G)+2$. Insira um vértice a' em A e faça-o adjacente aos vértices de $B \cup C \cup (D\setminus T)$. Faça um emparelhamento maximal M_{BC} em $G[B \cup C]$ e pinte com cor $\Delta(G)+1$. Como $|B|<|C|$ existe um conjunto S de vértices de Conde não incidem arestas de M_{BC}. Faça um emparelhamento maximal M_{SD}em $G[S \cup D]$e pinte M_{SD}com cor $\Delta(G)+1$. Seja $M = M_{BD} \cup M_{BC} \cup M_{SD}$. Considere o grafo $G\setminus M$. Observe que A é o núcleo, pelo Teorema 4, é possível colorir $G\setminus M$ com $\Delta(G)$ cores. Pinte os vértices de $B \cup C \cup (D\setminus T)$ com as respectivas cores das arestas que os conectam a a'e remova a'. Pinte os vértices de Acom cor $\Delta(G)+1$. Essa é uma coloração TDV de G: os rótulos dos vértices de B e D possuem a cor $\Delta(G)+2$ se distinguindo dos rótulos dos vértices de Ae C; os rótulos dos vértices de Dse distinguem dos demais por sua cardinalidade; os rótulos dos vértices de A são os únicos que têm cor $\Delta(G)+1$e não têm $\Delta(G)+2$ tal como os rótulos dos vértices de C, mas tem cardinalidade diferente. □

Usando argumentos similares também conseguimos demonstrar os seguintes resultados.

Lema 9. *Se |A| < |B| = |C| = |D|, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G)+2$.*

Lema 10. *Se |A| < |B| = |C| < |D|, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G)+2$.*

Lema 11. *Se |A| < |B| < |C| = |D|, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G)+2$.*

Como todos os casos de 4-partidos completos resolvidos tem $\chi_a''(G) \leq \Delta(G)+2$ e o único caso não resolvido é quando |A| = |B| = |C| < |D| − 1, vale o seguinte corolário.

Corolário 12. Se G é um grafo 4-partido completo e $\chi_a''(G) > \Delta(G)+2$, então $|A| = |B| = |C| < |D| - 1$.

Adjacent vertex distinguishing total colouring in complete 4-partite graphs

ABSTRACT

OBJECTIVE: This work aims to determine a tight upper bound for the AVD total chromatic number of complete 4-partite graphs. **METHODS:** We use the hypothetico-inductive method to create a tight upper bound for the AVD total chromatic number of complete 4-partite graphs based on the observations of previous results on complete tripartite graphs. The deductive method was used to prove the raised hypothesis. **RESULTS:** If G is a complete 4-partite graph, then $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$. **CONCLUSIONS:** The AVD total chromatic number of complete 4-partite graphs with maximum degree adjacent vertex is $\Delta(G) + 2$.

KEYWORDS: Complete 4-partite graphs. Adjacent vertex distinguishing total colouring. Adjacent vertex distinguishing total chromatic number.

REFERÊNCIAS

LUIZ, Atilio Gomes. **Sobre a coloração total semiforte.** 2014. 139 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ciência da Computação, Unicamp, Campinas, 2014.

TIBURCIO, Igor Ramos; ALMEIDA, Sheila Morais de. **Coloração total semiforte de grafos tripartidos completos.** 2016. 45 f. TCC (Graduação) - Curso de Ciência da Computação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2016.

VIZING, Vadim G. Critical graphs with given chromatic class. **Diskret. Analiz**, v. 5, n. 1, p. 9-17, 1965.

YAP, Hian Poh. Total colourings of graphs. **Bulletin of the London Mathematical Society**, v. 21, n. 2, p. 159-163, 1989.

ZHANG, Zhongfu et al. On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs. **Science in China Series A: Mathematics**, v. 48, n. 3, p. 289-299, 2005.

Recebido: 31 ago. 2017.

Aprovado: 02 out. 2017.

Como citar:

SCAKETTI, M. et al. Coloração total distinta na vizinhança em grafos 4-partidos completos. In: SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DA UTFPR, 22., 2017, Londrina. **Anais eletrônicos do Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR.** Londrina: UTFPR, 2017. Disponível em: <https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2017/index. Acesso em: XXX.

Correspondência:

Matheus Scaketti

Rua Ernani Batista Rosas, número 3131, Bloco 7, Apartamento 1, Bairro Jardim Carvalho, Ponta Grossa, PR, Brasil.