https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2018

Gaps Entre Primos Indexados em 2^n

Gaps of primes indexed in 2^n

Luiz Otávio Fernandes
Otavioluiz22@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil
Prof. Dr. Douglas Azevedo
douglasa@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil

RESUMO

Sequências e séries infinitas de números reais, apesar de formarem um tópico introdutório em disciplinas Cálculo e Análise, têm ampla utilização dentro da Matemática e da Física devido as suas diversas utilizações e aplicações. Neste trabalho, nosso objetivo é estudar o comportamento da subsequência p_{2^n} da sequência p_n de números primos através da teoria de séries de números positivos. Nossa abordagem utiliza uma combinação entre uma consequência do importante Teste de Kummer, o qual fornece condições necessárias e suficientes para que uma série de termos positivos convirja ou divirja e o notável Teste da Condensação de Cauchy, o qual caracteriza a convergência e divergência de séries cujos os termos são positivos e formam uma sequência decrescente.

PALAVRAS-CHAVE: Sequências de números positivos. Séries de números positivos. *Gaps* de Números Primos. Teste de Kummer. Teste de Cauchy.

ABSTRACT

Although infinite series and sequences of real numbers form an introductory topic in Calculus and Analysis, they have wide use in Mathematics and Physics due to its aplications. In this work, our goal is to study the behaviour of the subsequence p_{2^n} of the sequence p_n of prime numbers through the theory of series of positive numbers. Our approach uses a combination between the important Kummer's Test which furnishes necessary and sufficient conditions for the convergence or divergence of a positive terms series and the remarkable Cauchy condensation test which characterizes the convergence or divergence of decreasing positive terms series.

KEYWORDS: Real Sequences of positive numbers. Series of positive numbers. Gaps of primes numbers. Kummer's Test. Cauchy Condensation Test.

Recebido: 31 ago. 2018.
Aprovado: 04 out. 2018.

INTRODUÇÃO

O conjunto dos números primos formam, provavelmente, o objeto mais misterioso e interessante da matemática. Lembremos que um número inteiro positivo p é dito primo quando é somente divisível somente por ele mesmo e por 1. Apesar de precisarmos de pouco embasamento matemático para entender o que é um número primo, a descrição e a comprovação de muitos dos comportamentos deste conjunto exigem técnicas profundas, cujo pré-requisito vai muito além da noção de divisão.

Os primos foram primeiramente estudados por Euclides, o qual provou que estes formam um conjunto infinito. A demonstração deste resultado aparece no livro IX de *Os Elementos* e é uma das primeiras provas conhecidas que se utiliza a demonstração por redução ao absurdo.

O presente trabalho apresenta as ferramentas e resultados que serão utilizados para investigarmos uma subsequência particular da sequência g_n, a saber, a subsequência $p_{2^{n+1}} - p_{2^n}$, por meio de uma combinação entre uma consequência do importante Teste de Kummer, o qual fornece condições necessárias e suficientes para que uma série de termos positivos convirja ou divirja e o notável Teste da Condensação de Cauchy, o qual caracteriza a convergência e divergência de séries cujos os termos são positivos e formam uma sequência decrescente.

METODOLOGIA

O trabalho foi desenvolvido por meio de estudos dirigidos pelo professor orientador com base nos livros referenciados ao final desse relatório. Os trabalhos eram abordados por meio de estudo e apresentado semanalmente para o orientador por meio de seminários e reuniões para a discussão dos resultados obtidos.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Definição 1. Uma sequência é uma função $x: N \to R$, onde os termos do domínio são representados por n e os termos do contradomínio por $\{x_n\}$.

Exemplo 1. $\{x_n\}=1$, para todo $n \in N$. Este é um exemplo de sequência constante evidentemente limitada.

Exemplo 2. $\{x_n\}=n$, para todo $n \in N$. Neste caso, $\{x_n\}$ é uma sequência crescente e limitada inferiormente.

Definição 2. Diz-se que o número real a é limite da sequência (X_n) de números reais quando para cada número real ε ¿0, dado arbitrariamente, for possível obter um número inteiro $n_0 \in N$ tal que $|x_n - a| < ¿$ ε. Formalmente, $\lim x_n = a$ se

$$\forall\ \varepsilon > 0 \exists\ n_0 \in N ; n > n_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon .$$

Além da definição, resultados relacionados a subsequências, unicidade de limite, monotonicidade, convergência e divergência foram tratados. Esses resultados tiveram significante importância para os estudos apresentados, como as propriedades aritméticas dos limites, que serão apenas listadas abaixo.

Se $\lim x_n = a$ e $\lim\ y_n = b$, então

1. $\lim\ (x_n + y_n) = a + b$; $\lim\ (x_n - y_n) = a - b$;
2. $\lim\ (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;
3. $\lim\ \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$.

Definição 3. Diremos que "$\{x_n\}$tende para mais infinito", $\lim x_n = +\infty$, quando para todo número real $A > 0$, dado arbitrariamente, pudermos encontrar um número natural n_0 pertencente ao conjunto dos naturais, tal que se existir uma indexação n maior que n_0 então $x_n > A$.

Assim como na definição 2, as propriedades de limites infinitos foram amplamente discutidas durante o projeto e estas serão listadas abaixo.

1. Se $\lim x_n = +\infty$ e y_né limitada inferiormente, então $\lim\ (x_n + y_n) = +\infty$.
2. Se $\lim x_n = +\infty$ e existe um $C > 0$ tal que $y_n > C$ para todo $n \in N$, então $\lim\ (x_n \cdot y_n) = +\infty$.
3. Seja $x_n > 0$ para todo n. Então $\lim x_n = 0 \quad \lim \frac{1}{x_n} = +\infty$.
4. Sejam $\{x_n\}$e $\{y_n\}$sequências de números positivos. Então:

a. Se existir um $C > 0$ tal que $x_n > C$ apara todo n e se $\lim\ y_n = 0$ tem-se $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

b. Se (X_n) é limitada e $\lim\ y_n = +\infty$ então $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$.

Definição 4. Uma sequência é dita de Cauchy quando cumpre a seguinte condição: Dado $\varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in N$tal que $m > n_0$ e $n > n_0 \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Os resultados relacionados a definição anterior são de suma importância para os objetivos do trabalho e estes serão citados abaixo.

1. Toda sequência convergente é de Cauchy;
2. Toda sequência de Cauchy é limitada;

3. Se uma sequência de Cauchy $\{x_n\}$possui uma subsequência convergindo para $a \in R$ então $\lim x_n = a$;
4. Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.

O conteúdo de Séries Numéricas foi trabalhado quase de maneira paralela ao conteúdo de Sequências. O termo "série" substitui a ideia de "soma finita", ou infinita, dos termos de uma sequência.

Com relação as séries, foram abordados alguns resultados avançados para convergência de séries, como o Teste da Condensação de Cauchy e o Teorema de Kummer. Ambos os resultados, que são descritos na introdução e enunciados abaixo, são as principais ferramentas de estudo neste trabalho.

Seja $\sum a_k$ uma serie de termos positivos.

(1) $\sum a_k$ converge se, e somente se, existir uma $\{q_k\}$ de termos positivos, C ¿0 e $N \in N$ tal que

$$q_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - q_{k+1} \geq C$$

(2) $\sum a_k$ é divergente se, e somente se, existir uma $\{q_k\}$ de termos positivos, C ¿0 e $N \in N$ tal que $\sum \frac{1}{q_k}$diverge e

$$q_k \frac{a_k}{a_{k+1}} + q_{k+1} \leq 0.$$

Teorema*: Suponha que* $\{a_n\}$ *seja uma sequência não-crescente de números reais não-negativos. Então* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*converge se, e somente se,* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$*converge.*

Os dois teoremas enunciados anteriormente são as ferramentas necessárias para um estudo mais aprofundado da sequência de números primos. Mais precisamente, a contra-positiva do Teorema de Kummer combinada com o Teorema da Condensação de Cauchy. Essa combinação é dada por:

Corolário: Seja $\sum a_k$ uma serie de termos positivos.

(1) $\sum a_k$ converge se, e somente se, para toda sequência $\{q_k\}$ de termos positivos, C ¿0 e $N \in N$tal que $\sum \frac{1}{q_k}$diverge de modo que

$$q_k \frac{a_{2^k}}{2a_{2^{k+1}}} - q_{k+1} > 0, n \geq N.$$

(2) $\sum a_k$ é divergente se, e somente se, existir uma $\{q_k\}$ de termos positivos, C ¿0 e $N \in N$ e

$$q_k \frac{a_{2^k}}{2a_{2^{k+1}}} - q_{k+1} < C, n \geq N.$$

CONCLUSÃO

A importância dos Teoremas de Kummer e Condensação de Cauchy é ressaltada pelo fato de ambas apresentarem uma caracterização de convergência de séries de termos positivos, sendo o segundo resultado aplicável sob a hipótese adicional de decrescência da sequência em questão. Ainda, é importante ressaltar a combinação entre estes dois resultados e possíveis aplicações dela, sendo justamente essa combinação o resultado central a ser utilizado para alcançarmos os objetivos propostos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus; aos meus amigos e familiares, por me apoiarem sempre, principalmente nos momentos difíceis; ao Prof. Dr. Douglas Azevedo, por ter me dado oportunidade de ter suas orientações e a Fundação Araucária pelo auxílio financeiro.

REFERÊNCIAS

Agnew, Ralph Palmer. Summability of subsequences, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 50, Number 8 (1944), 596-598.

Azevedo, Douglas. Extension of Kummer's test: Summability characterizations of positive sequences, preprint, (2017).

Knopp, Konrad. Theory and application of infinite series, Blackie & Son Limited, London and Glascow, 1954.

Lima, Elon Lages. Curso de Análise Real. 14 ed. São Paulo: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

Tong, Jiajun. Kummer'sTest Gives Characterizations for Convergence or Divergence of all Positive Series, The American Mathematical Monthly, Vol. 101, No. 5 (1994), 450-452.