Coloração total de grafos split

Total coloring of split graphs

Rafael Porto de Oliveira
rafael.1997@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná,

Ponta Grossa, Paraná, Brasil

Sheila Morais de Almeida
Sheila.utfpr@gmail.com.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná,

Ponta Grossa, Paraná, Brasil

RESUMO

Uma coloração total de um grafo é a atribuição de cores para seus vértices e arestas de forma que elementos adjacentes não tenham a mesma cor. O Problema da Coloração Total é determinar o menor número de cores com que se pode obter uma coloração total de um dado grafo. Esse número é chamado de número cromático total. O objetivo deste trabalho foi estudar a classe de grafos split, para apresentar uma coloração total ótima para um subconjunto da classe. Existem desde 1995 métodos eficientes para resolver esse problema para os grafos split com grau máximo par. O fato destes resultados terem sido publicados a mais de 20 anos demonstra a dificuldade em se resolver o problema quando o grau máximo do grafo split é ímpar. Neste trabalho, apresentamos uma coloração total ótima para os grafos split com grau máximo ímpar que possuem pelo menos um vértice no conjunto independente com grau em intervalo específico. A coloração apresentada pode ser realizada por método eficiente, resultando em algoritmo polinomial.

PALAVRAS-CHAVE: Coloração total. Grafos Split. Número Cromático Total.

ABSTRACT

A total coloring of a graph is an assignment of colors to its vertices and edges such that the colors of adjacent elements are distinct. The Total Coloring Problem is to determine the least number of colors to obtain a total coloring of a given graph. This number is called total chromatic number. The goal of this work has been the study of the class of split graphs to present an optimum total coloring to a subset of this class. Since 1995 there are efficient methods to solve this problem for even maximum degree split graphs. The fact that these results have more than 20 years is an evidence of the complexity to work with the odd maximum degree split graphs. On this paper we do an optimum total coloring for odd maximum degree split graphs that have at least one vertex in the stable set with degree in an specific interval. This coloring can be done by an efficient method, resulting polynomial time algorithm.

KEYWORDS: Total coloring. Split graph. Total Chromatic Number.

Recebido: 31 ago. 2018.
Aprovado: 04 out. 2018.

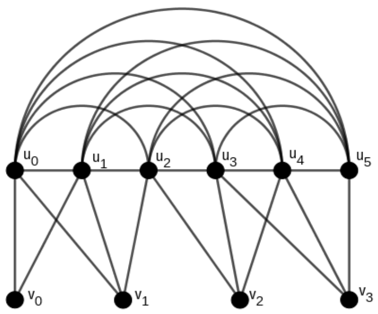
INTRODUÇÃO

Uma coloração total é uma atribuição de cores para os vértices e arestas do grafo de forma que quaisquer dois vértices que compartilham uma aresta tenham cores diferentes, quaisquer duas arestas que compartilham um vértice tenham cores diferentes e cada aresta tenha cor diferente das cores dos vértices em que incide. O Problema da Coloração Total é determinar o menor número de cores para se obter uma coloração total de um dado grafo . Tal número é chamado de número cromático total e denotado por . O grau de um vértice é o número de arestas incidentes em e é denotado por . O grau máximo de é o maior dentre os graus dos vértices de e é denotado por .

Todo problema de otimização tem uma versão de decisão. A versão de decisão do Problema da Coloração Total pergunta se, dado um grafo e um número inteiro , é possível fazer uma coloração total de com cores. A versão de decisão do Problema da Coloração Total é um problema NP-completo (SÁNCHEZ-ARROYO, 1989), o que significa que encontrar um método de solução eficiente para resolver este problema, qualquer que seja o grafo, ou provar que este método não existe vale um prêmio de um milhão de dólares, oferecido pelo *Clay Mathematics Institute*, que declarou ser este um dos sete problemas mais desafiadores deste milênio (CARLSON et al., 2006). Para tentar resolver o problema, uma das abordagens é dividi-lo em subproblemas que consideram subconjuntos de grafos.

Neste trabalho o subconjunto de grafos onde o Problema da Coloração Total foi estudado é a classe dos grafos split, definidos como , onde é um conjunto de vértices dois a dois adjacentes, é um conjunto de vértices dois a dois não adjacentes e é o conjunto das arestas do grafo. Os conjuntos e são chamados de clique e conjunto independente, respectivamente. A Figura 1 apresenta um exemplo de grafo split.

Figura 1 – Grafo Split



Fonte: Autoral

Chen et al. (1995) provaram que todo grafo split com par tem uma coloração total com cores. A prova apresentada por esses autores resulta em um algoritmo eficiente que resolve o Problema da Coloração Total nesse subconjunto dos split. Vinte anos depois da solução apresentada para os grafos split com grau máximo par, não se conhece algoritmo eficiente que resolva o Problema da Coloração Total para os grafos split com grau máximo ímpar. Este trabalho apresenta novos resultados, garantindo que quando o grafo split com grau máximo ímpar tem um vértice no conjunto independente com grau entre e , existe uma coloração total com cores. A prova apresentada é um algoritmo eficiente para a solução do problema nesses casos.

ARCABOUÇO TEÓRICO

Esta seção apresenta conceitos e resultados anteriores importantes para o desenvolvimento desse trabalho.

Um quadrado latino é uma matriz de ordem , onde cada célula tem um valor do conjunto e cada número aparece uma única vez em cada linha e coluna. Neste trabalho, são usados quadrados latinos definidos pela equação

(1)

Um diagrama de cores é uma sequência composta por vetores, onde cada vetor , , é uma sequência de cores distintas duas a duas. Seja . Para que um diagrama de cores seja monotônico, cada cor pode ocorrer no máximo vezes no conjunto de vetores . Um sufixo de um vetor de cores é um vetor de cores , tal que . Um sufixo de um diagrama de cores monotônico é uma sequência de vetores de cores , onde é sufixo de , para .

Para um quadrado latino definido pelo equação (1) e considerando um inteiro , k. O sufixo de a partir da -ésima coluna é definido pelo diagrama de cores , onde , . O sufixo aumentado do diagrama de cores é o diagrama de cores , onde para e é a concatenação de com para .

Lema 1 (ALMEIDA 2012) *O diagrama é monotônico, para par, .*

Um grafo é bipartido se seus vértices podem ser particionados em dois conjuntos independentes.

Lema 2 (CHEN et al. 1995) Sejam um grafo bipartido e) um diagrama de cores monotônico onde cada tem pelo menos cores. O grafo B tem uma coloração de arestas que usa as cores de para colorir as arestas incidentes em , para todo .

RESULTADOS

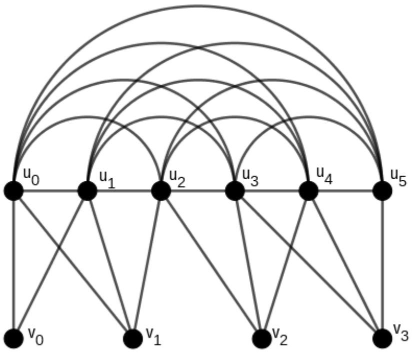
Esta seção apresenta uma técnica para a coloração total de um subconjunto dos grafos split com grau máximo ímpar.

Teorema 1 *Seja um grafo split com ímpar. Se possui pelo menos um vértice tal que , então .*

Demonstração: Considere um quadrado latino onde , construído de acordo com a equação (1). Para cada vértice cujo grau é menor que , adicione um novo vértice adjacente a . Repita esse procedimento até que todos os vértices de tenham grau igual a . Reordene os vértices da clique de modo que os vértices vizinhos de sejam os primeiros. A Figura 2 apresenta um grafo split que satisfaz as condições da hipótese e o quadrado latino correspondente.

Para cada aresta , atribua a cor da célula , . Pinte os vértices de com a cor da célula . Pinte cada vértice com a cor célula . Pinte cada aresta com a cor da célula , para , onde é o vértice com grau .

Figura 2 - Grafo Split e Quadrado Latino de ordem . As linhas e colunas são numeradas de a e o tamanho da clique é .



	u0	u1	u2	u3	u4	u5	q	
u0	0	1	2	3	4	5	6	7
u1	1	2	3	4	5	6	7	0
u2	2	3	4	5	6	7	0	1
u3	3	4	5	6	7	0	1	2
u4	4	5	6	7	0	1	2	3
u5	5	6	7	0	1	2	3	4
q	6	7	0	1	2	3	4	5
	7	0	1	2	3	4	5	6

Fonte: Autoral

Construa um diagrama de cores tal que quando ; e quando Pelo Lema 1, é monotônico. As arestas ainda não coloridas formam um grafo bipartido com partição , onde cada vértice tem grau no máximo . Pelo Lema 2, tais arestas podem ser coloridas pelo diagrama . Por fim, remova os vértices que foram adicionados artificialmente. Como foi apresentada uma coloração total com cores. □

CONCLUSÃO

Apresentamos uma técnica eficiente para coloração total de grafos split com grau máximo ímpar para casos onde não se conhecia nenhum método eficiente de solução. Como mencionado anteriormente, trata-se de um problema NP-completo e a contribuição foi encontrar uma coloração eficiente em um subconjunto de grafos. Considerando ainda os grafos split com grau máximo ímpar, há casos onde o grafo não possui nenhum vértice que satisfaz a equação proposta, mas é possível adicionar novas arestas incidentes em algum vértice v, desde que sem afetar o grau máximo do grafo, para que o grafo satisfaça a hipótese do Teorema 1. Neste caso, o novo grafo pode ser colorido com cores e, por consequência, o grafo original, que é um subgrafo deste, também.

REFERÊNCIAS

Abdón Sánchez-Arroyo. *Determining the total colouring number is np-hard*. *Discrete mathematics*, 78(3):315-319, 1989.

James Carlson, James A Carlson, Arthur Jaffe, and Andrew Wiles. *The millennium prize problem*. American Mathematical Soc., 2006.

Bor-Lian Chen, Hung-Lin Fu, MT Ko, et al. *Total chromatic number and chromatic index of split graphs*. *Journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing*, (17), 1995.

Sheila Morais de Almeida. *Coloração de arestas em grafos Split*. Tese de doutorado, Instituto de Computação da Universidade Estadual de Campinas, 2012.