https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2018

Coloração total distinta nos vértices adjacentes

Adjacent distinguishing total coloring

Pedro Henrique Salgado
pedrosalgado@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Paraná, Brasil
Sheila Morais de Almeida
sheilaalmeida@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Paraná, Brasil

RESUMO

Uma coloração total própria de um grafo é uma atribuição de cores para seus vértices e arestas de forma que elementos adjacentes recebam cores distintas. Dada uma coloração total própria em um grafo **G**, **C(v)** é o conjunto de cores de um vértice **v**, composto pelas cores das arestas que incidem em v e pela a cor do próprio v. Uma coloração total distinta nos vértices adjacentes é uma coloração total própria em que **C(u)** ≠**C(v)** para todo par de vértices adjacentes **u** e **v**. O Problema da Coloração Total Distinta nos Vértices Adjacentes consiste em determinar o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração total distinta nos vértices adjacentes de um grafo. Este trabalho apresenta a solução do Problema da Coloração Total Distinta nos Vértices Adjacentes para as potências de caminhos P_n^k com **n > 2k + 1**.

PALAVRAS-CHAVE: Coloração total distinta nos vértices adjacentes. Potências de caminho. Grafos indiferença.

ABSTRACT

A proper total coloring of a graph is an assignment of colors to the vertices and edges such that adjacent elements receive distinct colors**.** The set of colors of a vertex **v**, denoted by **C(v)**, is composed by the colors of the edges incident to **v** and the color of **v**. An adjacent vertex distinguishing total coloring is a proper total coloring such that **C(u)** ≠**C(v)** for every pair of adjacent vertices **u** and **v**. The Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring Problem consists in determining the minimum number of colors to an adjacent vertex distinguishing total coloring of a graph. This work presents the solution of the Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring Problem for the powers of paths P_n^k with **n > 2k + 1**.

KEYWORDS: Adjacent vertex distinguishing total coloring. Indifference graphs. Powers of paths.

Recebido: 31 ago. 2018.
Aprovado: 04 out. 2018.

INTRODUÇÃO

Uma **coloração total** é uma atribuição de cores para os vértices e arestas de um grafo de forma que quaisquer duas arestas que incidem no mesmo vértice têm cores diferentes, quaisquer dois vértices que formam uma aresta têm cores diferentes, e qualquer aresta tem cor diferente das cores dos vértices que a compõe. Dada uma coloração total de um grafo **G** dizemos que o **conjunto de cores** de um vértice **v**, denotado por **C(v)**, é composto pela cor de **v** e pelas cores das arestas que incidem em **v**. Uma **coloração total distinta nos vértices adjacentes** (ou **coloração TDVA**) é uma coloração total onde vértices adjacentes têm conjuntos de cores distintos. O **Problema da Coloração Total Distinta nos Vértices Adjacentes**, introduzido por Zhang et al. (2005), é determinar o menor número de cores com que se pode realizar uma coloração TDVA em um grafo **G**. Tal número é chamado de **número cromático total distinto nos vértices adjacentes**, ou **número cromático TDVA**, e é denotado por χ''_a**(G)**.

Neste trabalho, apresentamos o número cromático TDVA para algumas potências de caminho.

ARCABOUÇO TEÓRICO

Uma **potência de caminho**, P_n^k, é um grafo com conjunto de vértices **V(**P_n^k**)** = {v_0**, …,** v_{n-1}} onde dois vértices v_i e v_j são adjacentes se, e somente se, | **j - i** | ≤ **k.** Considerando esta definição, quando | **j - i** | ≤ **k**, todos os vértices entre v_i e v_j são adjacentes entre si. Em qualquer grafo, um conjunto de vértices dois a dois adjacentes é chamado de **clique**. As potências de caminhos são uma subclasse dos grafos indiferença. Um grafo é **indiferença** se seus vértices podem ser linearmente ordenados de forma que vértices que pertencem à mesma clique sejam consecutivos. Tal ordem é denominada **ordem indiferença** (ROBERTS, 1971).

O grau de um vértice **v**, denotado por **d(v)**, é a quantidade de arestas que incidem em **v**, o maior dos graus dos vértices de um grafo **G** é denotado por **Δ(G)** e chamado de **grau máximo**. Pedrotti e Mello (2010) provaram que para um grafo indiferença **G** com Δ**(G)** ímpar e vértices adjacentes de grau máximo, χ''_a**(G)** = Δ**(G) + 2**; e que quando Δ**(G)** é par e não existem vértices adjacentes de grau máximo, então χ''_a**(G)** = Δ**(G)+1**. Após esse trabalho, o Problema da Coloração TDVA estava em aberto para as potências de caminho com $\Delta(P_n^k)$ par que têm vértices adjacentes de grau máximo e também para o caso em que $\Delta(P_n^k)$ é ímpar e não existem vértices adjacentes de grau máximo. Este trabalho concentra-se no Problema da Coloração TDVA para as potências de caminho do primeiro caso, ou seja, quando $\Delta(P_n^k)$ é par e existem vértices adjacentes de grau máximo.

Considere um grafo **G** com uma coloração total. Observe que o conjunto de cores de qualquer vértice de grau máximo em **G** tem tamanho igual a Δ**(G) + 1**. Então para toda coloração total que use exatamente Δ**(G) + 1** cores, os conjuntos de cores de quaisquer dois vértices de grau máximo são iguais. Essa observação dá origem ao Teorema 2.

Teorema 2 (Zhang et al., 2005) Seja **G** um grafo com vértices adjacentes de grau máximo, então χ''_a**(G)** $\geq$ Δ**(G)+2**.

Para qualquer grafo G, denotam-se por $V(G)$ e $E(G)$ seus conjuntos de vértices e arestas, respectivamente. Um grafo **completo**, denotado por K_n, é um grafo com n vértices em que existe aresta entre cada par de vértices. Sejam K_n, um grafo completo colorido, e G, um grafo que se quer colorir. Um ***pullback*** de K_n em G é uma função $f: V(K_n) \rightarrow V(G)$, tal que se $uv \in E(K_n)$, então ***f*(u)*f*(v)** $\in$ **E(G)** e ***f*** é injetora quando restrita à v e seus vizinhos, para todo par de vértices **u** e **v** do grafo K_n. A seguir, a técnica de *pullback* é utilizada para determinar o número cromático TDVA de algumas potências de caminho.

RESULTADOS

Essa seção apresenta os resultados sobre o Problema da Coloração TDVA para as potências de caminhos, obtidos nessa iniciação científica. Observe que se P_n^k é uma potência de caminho com **1 < n** $\neq$ **2k+1**, então existem vértices adjacentes de grau máximo. Pelo Teorema 2, nestes casos, χ''_a**(G)** $\geq$ Δ**(G)+2**. O Teorema 3 mostra que existe uma coloração TDVA para esses grafos com Δ**(G)+2** cores.

Teorema 3. Seja P_n^k uma potência de caminho com **n > 2k+1**, então $\chi''_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k) + 2$.

Demonstração. Considere uma potência de caminho P_n^k com **n > 2k+1** e vértices rotulados $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ de acordo com a ordem indiferença. Considere um grafo completo K_{2k+2} com uma coloração total τ: $V(K_{2k+2}) \cup E(K_{2k+2}) \rightarrow \{0, 1, \ldots, 2k+1\}$, onde:

$$\begin{cases} \tau(u_i) = 2i \bmod (2k+2) \\ \tau(u_i, u_j) = (i+j) \bmod (2k+2) \end{cases} \quad (4)$$

Seja a coloração do grafo P_n^k, dada pela função α: $V(P_n^k) \cup E(P_n^k) \rightarrow \{0, 1, \ldots, 2k+1\}$ definida a seguir.

$$\begin{cases} \alpha(v_i) = \tau(v_{i \bmod (2k+2)}) \\ \alpha(v_i, v_j) = \tau(v_{i \bmod (2k+2)}, v_{j \bmod (2k+2)}) \end{cases}$$
(5)

Pela definição de α, nenhum vértice v_i do grafo P_n^k é adjacente a dois vértices v_j e v_p tal que **j *mod* (2k+2) = p *mod* (2k+2)**, senão $\Delta(P_n^k) > 2k$. Desse modo não existem arestas com a mesma cor que incidem no mesmo vértice. Além disso, não existem no P_n^k vértices adjacentes v_i e v_j de forma que $\alpha(v_i) = \alpha(v_i, v_j)$, caso contrário, **2i *mod* (2k+2) = (i+j) *mod* (2k+2)** e a distância entre v_i e v_j é maior que **2k**. Suponha por contradição que existem dois vértices adjacentes, v_i e v_j, de forma que $\alpha(v_i) = \alpha(v_j)$. Considere **i < j**. Lembre-se que $\alpha(v_i) = \tau(v_{i \bmod 2k+2})$ e $\alpha(v_j) = \tau(v_{j \bmod 2k+2})$. Como **i < j**, então **2j - 2i** $\geq$ **2k + 2**. Portanto **j - i** $\geq$ **k + 1**, um absurdo, uma vez que v_i e v_j são adjacentes e estão a uma distância maior que **k** no P_n^k. Assim sendo, α é uma coloração total própria do P_n^k.

Agora para provar que **α** é uma coloração TDVA, vamos mostrar que para todo vértice $\mathbf{v_i}$ do P_n^k, existe uma cor **ω**, de forma que **ω** ∉ $\mathbf{C(v_i)}$ e **ω** ∈ $\mathbf{C(v_j)}$, para cada par de vértices adjacentes $\mathbf{v_i}$ e $\mathbf{v_j}$, **j > i**. Seja $\mathbf{v_i}$ um vértice do P_n^k e $\mathbf{v_j}$ o vértice adjacente a $\mathbf{v_i}$ mais à direita na ordem indiferença. Observe que, por construção $\mathbf{v_i}$ não é adjacente a $\mathbf{v_{j+1}}$. Pela função **α**, a cor **ω** = **((i *mod* 2k + 2) + (j mod 2k + 2) + 1) *mod* (2k + 2)** aparece apenas nas arestas $\mathbf{v_i v_p}$, em que **p = j + 1 + x(2k + 2)**, **x** ∈ **ℤ**. Além disso, $\mathbf{\alpha(v_i)}$ ≠**ω**. Suponha por contradição que $\mathbf{\alpha(v_i) = \omega = \alpha(v_i,v_{j+1})}$. Então, **2i *mod* (2k+2) = (i+j+1) *mod* (2k+2)**. Como **i < j + 1, 2i + x(2k + 2) = j + 1** para algum **x** ∈ **ℤ**, **x** ≥ **1**. Portanto, **j - i** ≥ $\Delta(P_n^k)$ **+ 1 = 2k + 1**, uma contradição, uma vez que a distância entre $\mathbf{v_i}$ e $\mathbf{v_j}$ é no máximo **k**. Então, $\mathbf{\alpha(v_i)}$ ≠**ω**.

Por fim, resta mostrar que a cor **ω** incide em todos os vértices de $\mathbf{v_{i+1}}$ a $\mathbf{v_j}$. Pela função **α**, **ω** = $\mathbf{\alpha(v_i, vj_{+1}) = \alpha(v_{i+q}, v_{j+1-q})}$, para **1** ≤ **q < (j-i+1)/2.** Além disso, se o número de vértices de $\mathbf{v_{i+1}}$ até $\mathbf{v_j}$ é ímpar, então o vértice $\mathbf{v_{(j+1+1)/2}}$ possui a cor **ω**. Assim sendo, a cor ω incide em todos os vértices entre $\mathbf{v_{i+1}}$ e $\mathbf{v_j}$. Portanto, **α** é uma coloração TDVA válida com **2k+2** = $\Delta(P_n^k)$ + **2** cores. □

CONCLUSÕES

As potências de caminho P_n^k, com **n < k + 1** são grafos completos e seu número cromático TDVA já é conhecido (ZHANG et al., 2005). O único caso em que não há vértices adjacentes de grau máximo é quando **n = 2k + 1**. Neste caso**,** $\chi''_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k) + 1$. Para os casos em que P_n^k tem vértices adjacentes de grau máximo e o $\Delta(P_n^k)$ é ímpar, ou seja, quando **n** ≠ **2k + 1**, o número cromático TDVA é conhecido (PEDROTTI e MELLO, 2010). Vale ressaltar, que este caso só ocorre quando **n < 2k + 1**. Esse projeto contribui para o avanço do conhecimento da coloração TDVA em potências de caminho, provando que $\chi''_a(P_n^k) = \Delta(P_n^k) + 2$ quando **n > 2k+1**. Esse trabalho foi desenvolvido em conjunto com a aluna de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação (PPGCC) da UTFPR - Câmpus Ponta Grossa, Mayara Midori Omai. Tais resultados foram apresentados e publicados nos anais do Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais . O último caso em aberto para as potências de caminho, quando **k+1 < n < 2k** **e** $\Delta(P_n^k)$ é par, foi resolvido pela aluna de mestrado e juntos submetemos tais avanços ao periódico *Discrete Applied Mathematics*.

REFERÊNCIAS

PEDROTTI, V.; MELLO, C. P. de. Adjacent-vertex-distinguishing total coloring of indifference graphs. Matemática contemporânea, v. 39, p. 101–110, 2010.

ROBERTS, F. S. On the compatibility between a graph and a simple order. Journal of Combinatorial Theory, Series B, v. 11, n. 1, p. 28 – 38, 1971. ISSN 0095-8956. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895671900104>.Acesso em: 10 jun 2017.

SALGADO, P. H.; OMAI, M. M.; ALMEIDA, S. M. Coloração total distinta na vizinhança em potências de caminhos. In: UTFPR. Anais do II Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais, 2017. v. 2, p. 53–56. ISSN 2526-1371.

ZHANG, Z. et al. On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs. Science in China series A: mathematics, Springer, v. 48, n. 3, p. 289–299, 2005.