

## Adaptação de métodos numéricos associados à técnica de comprimento de arco linear para a solução de problemas não lineares de estruturas

### Adaptation of numerical methods associated with the Linear Arc-Length technique for solving nonlinear structural problems

#### RESUMO

O método de Newton-Raphson é um dos métodos mais utilizados para resolver problemas não lineares na Engenharia Estrutural. Uma de suas vantagens é a taxa de convergência quadrática, desde que a solução aproximada inicial esteja próxima à solução do problema e a inversa da matriz Jacobiana (matriz de rigidez) exista. Este trabalho objetiva estudar e implementar computacionalmente métodos iterativos com ordem de convergência superior, associados à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear, para a solução de problemas não lineares de treliças. Uma simulação numérica de uma treliça espacial do tipo cúpula com comportamento não linear geométrico é realizada por meio do programa Matlab. As estruturas são discretizadas com o Método Posicional dos Elementos Finitos, e a relação constitutiva do material é adotada elástica-linear. Os resultados mostram que a resposta da estrutura é alcançada com menor tempo de processamento em comparação com o método de Newton-Raphson.

**PALAVRAS-CHAVE:** Treliça espacial. Comprimento de Arco Linear. Método Posicional de Elementos Finitos. Não linearidade geométrica.

#### ABSTRACT

The Newton-Raphson method is one of the most widely used methods for solving nonlinear problems in Structural Engineering. One of its advantages is the quadratic convergence rate, provided that the initial approximate solution is close to the solution of the problem and the inverse of the Jacobian matrix (rigidity matrix) exists. This work aims to study and implement computationally iterative methods with order of superior convergence, associated to the Linear Arc-Length path following, for the solution of nonlinear trusses problems. A numerical simulation of a dome type space truss with geometric nonlinear behavior is performed through the Matlab program. The structures are discretized with the Finite Elements Positional Method, and the constitutive relation of the material is adopted elastic-linear. The results show that the structure response is achieved with shorter processing time in comparison with the Newton-Raphson method.

**KEYWORDS:** Space truss. Linear Arc-Length. Finite Elements Positional Method. Geometric nonlinear.

**Juliano Rodrigues Fabro**  
[julianofabro@hotmail.com](mailto:julianofabro@hotmail.com)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

**Luiz Antonio Farani de Souza**  
[lasouza@utfpr.edu.br](mailto:lasouza@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

**Recebido:** 31 Ago. 2018.  
**Aprovado:** 04 Out. 2018.

**Direito autorial:**  
Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

Para a concepção de treliças mais leves e eficientes dentro dos padrões de segurança e qualidade, é fundamental o estudo dessas estruturas próximas ao colapso devido a grandes modificações que ocorrem na geometria e a perda de linearidade na relação deformação-tensão. Neste trabalho são desenvolvidos algoritmos por meio de uma adaptação de métodos iterativos para a solução de sistemas de equações não lineares encontrados na literatura ao problema estrutural não linear. São implementados os métodos de Potra-Pták (1984), do Ponto Médio (FRONTINI; SORMANI, 2004), de Lotfi (2014), de Weerakoon e Fernando (2000), Newton-Raphson Padrão e Newton-Raphson Modificado. Para que seja possível obter a trajetória de equilíbrio completa da estrutura com pontos limites, esses métodos são associados à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear.

Uma simulação numérica de uma treliça espacial do tipo cúpula com comportamento não linear geométrico é realizada por meio do programa Matlab (MATLAB, 2015). Os resultados numéricos alcançados evidenciam o melhor desempenho dos métodos com ordem de convergência superior, em comparação com o método clássico de Newton-Raphson. Avaliou-se na simulação os seguintes parâmetros: o tempo de processamento em segundos ( $t$ ); os números totais de passos de força ( $NP$ ) e iterações acumuladas ( $k_{total}$ ) até a convergência para a solução; e o número médio de iterações por passo de força ( $k_{médio}$ ). Além disso, foi obtida a trajetória de equilíbrio da estrutura com pontos limites de força e de deslocamento.

## METODOLOGIA

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural com comportamento não linear geométrico é descrita pela equação:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d}) = 0, \quad (1)$$

na qual  $\mathbf{g}$  é o vetor de forças desequilibradas,  $\mathbf{F}_{int}$  é o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de coordenadas nos pontos nodais da estrutura  $\mathbf{d}$ ), e  $\lambda$  é o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor de referência  $\mathbf{F}_r$ . A solução do sistema dado em (1) é obtida por meio de um esquema iterativo e incremental. Para uma sequência do parâmetro de força  $\lambda$ , uma sequência do respectivo incremento de coordenadas nodais  $\mathbf{d}$  é calculada.

Os métodos iterativos implementados neste trabalho são do tipo  $\mathbf{d}^{(k+1)} = \Phi(\mathbf{d}^{(k)})$ . Estes fornecem uma sequência de vetores  $\{\mathbf{d}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ , sendo  $k$  o índice da iteração e  $\mathbf{d}^{(k)}$  a aproximação da solução na  $k$ -ésima iteração. Dada uma estimativa inicial  $\mathbf{d}^{(0)}$ , esta sequência poderá divergir ou convergir para uma  $i$ -ésima raiz  $\mathbf{d}^{*i}$  do sistema  $\mathbf{g}(\mathbf{d}, \lambda) = \mathbf{0}$ .

*Método de Newton-Raphson Padrão - NRP*

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{d}^{(k)} - \mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k)})^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{d}^{(k)}) \quad (2)$$

*Método de Newton-Raphson Modificado - NRM*

$$d^{(k+1)} = d^{(k)} - K(d^{(0)})^{-1} g(d^{(k)}) \quad (3)$$

*Método de Potra-Pták (1984) - PP*

$$y^{(k)} = d^{(k)} - K(d^{(k)})^{-1} g(d^{(k)}) \quad (4)$$

$$d^{(k+1)} = d^{(k)} - K(d^{(k)})^{-1} [g(d^{(k)}) + g(y^{(k)})]$$

*Método de Lotfi (2014) - LO*

$$y^{(k)} = d^{(k)} - \frac{2}{3} K(d^{(k)})^{-1} g(d^{(k)})$$

$$d^{(k+1)} = d^{(k)} - \left[ 2I - \frac{7}{4} S + \frac{3}{4} S^2 \right] [K(d^{(k)}) + K(y^{(k)})]^{-1} 2 g(d^{(k)}) \quad (5)$$

$$S = K(d^{(k)})^{-1} K(y^{(k)})$$

*Método de Weerakoon e Fernando (2000) - WF*

$$y^{(k)} = d^{(k)} - K(d^{(k)})^{-1} g(d^{(k)})$$

$$d^{(k+1)} = d^{(k)} - 2[K(d^{(k)}) + K(y^{(k)})]^{-1} g(d^{(k)}) \quad (6)$$

*Ponto Médio (FRONTINI; SORMANI, 2004) - PM*

$$y^{(k)} = d^{(k)} - \frac{1}{2} K(d^{(k)})^{-1} g(d^{(k)})$$

$$d^{(k+1)} = d^{(k)} - K(y^{(k)})^{-1} g(d^{(k)}) \quad (7)$$

O elemento de treliça é descrito pela formulação Posicional de Elementos Finitos (CODA, 2003). A formulação posicional é uma abordagem alternativa para problemas não lineares, que considera as posições nodais como variáveis do sistema não linear em vez dos deslocamentos. Esse elemento transmite somente forças axiais e tem área da seção transversal constante  $A$ . A matriz de rigidez tangente  $K_{el}$  e o vetor de forças internas  $F_{el}$  elementares são obtidos por, respectivamente:

$$K_{el} = \frac{EA}{L_0^3} B + \frac{EA \varepsilon_G}{L_0} C, \quad (8)$$

$$F_{el} = \frac{EA \varepsilon_G}{L_0} d, \quad (9)$$

em que  $EA$  é a rigidez axial e  $\varepsilon_G$  é a deformação de Green dada por:

$$\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}. \quad (10)$$

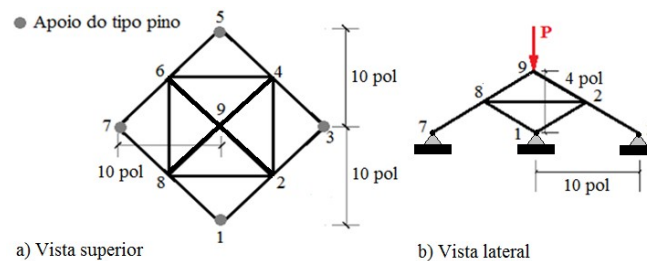
na qual  $L$  é o comprimento deformado e  $L_0$  é o comprimento indeformado.

## RESULTADOS

Seja o problema de uma treliça espacial do tipo cúpula composta por 9 nós e 16 elementos de barra, cujas dimensões e posição de aplicação da força  $P$  estão ilustradas na Figura 1. Este problema foi estudado por Hrinda (2010). Os quatro nós periféricos possuem apoio do tipo pino. O módulo de rigidez axial ( $EA$ ) tem valor  $1,0 \times 10^7$  lbf, e os parâmetros considerados nas análises para a técnica de continuação são: comprimento de arco linear  $\Delta l = 0,0005$ ; número de iterações desejadas  $Nd = 3$ ; tolerância  $tol = 1,0 \times 10^{-6}$ ;  $i_{m\acute{a}x} = 100$ ; e incremento de força  $\Delta P = 1,0$  lbf. Para o material considera-se o comportamento constitutivo elástico-linear. O peso próprio da estrutura é desprezado nas análises. Na Tabela 1 aparecem os resultados numéricos referentes a  $NP$ ,  $k_{total}$ ,  $k_{m\acute{e}dio}$  e  $t$ . Ressalta-se que não estão contabilizadas no tempo de processamento a geração da malha e a visualização dos resultados.

As trajetórias de equilíbrio (deslocamento vertical no topo da cúpula *versus* força  $P$ ) são mostradas na Figura 2 com vários pontos limites de força e deslocamento, e na Figura 3 são apresentadas as configurações da treliça indeformada e deformada.

Figura 1 – Modelo estrutural da cúpula com 16 barras e nove nós.



Fonte: Adaptada de Hrinda (2010).

Os resultados numéricos na Tabela 1 mostram que a convergência para a resposta do problema com o método do Ponto Médio é alcançada com um número inferior de incrementos de força ( $NP = 48$ ) e iterações acumuladas necessárias ( $k_{total} = 110$ ) e tempo de processamento ( $t = 0,349568$  s), em comparação com os demais métodos. Com a redução do número de iterações, diminuem-se a quantidade de atualizações da matriz de rigidez  $K$  e do vetor de força interna  $F_{int}$ , além da diminuição de resoluções de sistemas de equações lineares gerados da formulação de Elementos Finitos; em geral, a solução desses sistemas é o que demanda maior custo computacional durante o processamento.

Nota-se que na iteração do método de Potra-Pták é utilizada a mesma matriz de rigidez para a solução dos sistemas de equações lineares; assim, estes sistemas podem ser solucionados via decomposição (por exemplo, decomposição LU), visto que uma única fatoração no início da iteração é necessária. Deve-se ressaltar, contudo, que o problema numérico estudado é de pequena escala no contexto computacional atual, pois possui 27 graus de liberdade. Para sistema dessa ordem de grandeza, métodos diretos para a solução do sistema de equações lineares gerado a cada iteração no passo de força costumam ser mais eficientes. Os métodos iterativos de solução são vantajosos quando os problemas tiverem um número maior de graus de liberdade e recursos de alocação de memória.

Tabela 1 – Resultados numéricos para treliça espacial.

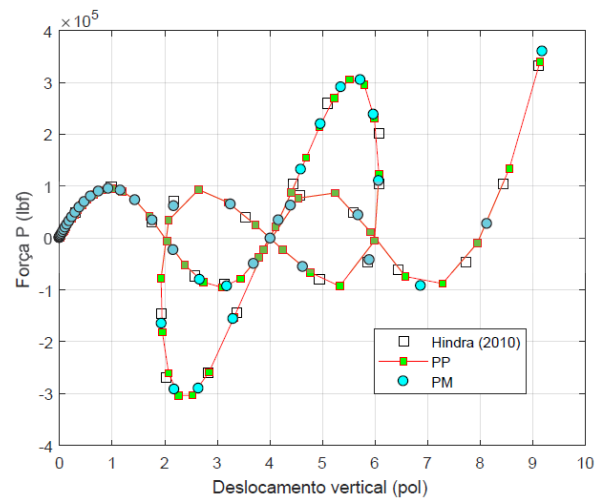
Métodos	$NP$	$k_{total}$	$k_{m\acute{e}dio}$	$t$ (s)
---------	------	-------------	---------------------	---------

NRP	497	1467	2,9517	1,439919
NRM	Não convergiu			
PP	69	173	2,5072	0,458727
PM	48	110	2,2917	0,349568
WF	123	337	2,7398	0,650635
LO	134	371	2,7687	0,752416

Fonte: Os próprios autores.

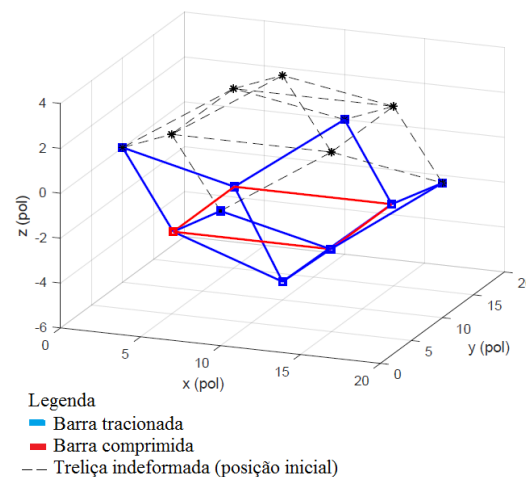
Na análise efetuada com o método de NRM, verificou-se uma instabilidade numérica e a convergência para a solução não ocorreu. Com efeito, problemas de convergência com esse método podem ocorrer durante a análise, uma vez que a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  é computada somente no início do passo de força corrente, mantendo-se invariável ao longo do ciclo iterativo no mesmo. A convergência pode ser alcançada com a diminuição dos valores do incremento de comprimento de arco ( $\Delta l$ ) e/ou incremento de força ( $\Delta P$ ).

Figura 2 – Trajetórias de equilíbrio.



Fonte: Os próprios autores.

Figura 3 – Configurações indeformada e deformada da estrutura.



Fonte: Os próprios autores.



## CONCLUSÃO

A crescente simulação de modelos estruturais complexos - por meio do Método dos Elementos Finitos - tem exigido a manipulação de grande quantidade de dados, que é intrínseco ao método, bem como a procura da diminuição do tempo de resposta para a resolução do problema estrutural. Comumente nas análises não lineares de problemas de estruturas são utilizados os métodos de Newton Raphson Padrão e Modificado. Assim, o estudo de métodos iterativos com convergência maior poderá contribuir nas análises de problemas da Engenharia Estrutural, quanto à obtenção da resposta do problema com menor tempo de processamento.

## 4 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UTFPR pelo apoio na realização dessa pesquisa.

## 5 REFERÊNCIAS

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF**. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

FRONTINI, M.; SORMANI, E. Third-order methods from quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations. **Applied Mathematics and Computation**, v. 149, n. 3, p. 771–782, 2004.

HRINDA, G. A. **Snap-Through Instability Patterns in Truss Structures**. NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia 2383, 2010.

LOTFI, T. A new optimal method of fourth-order convergence for solving nonlinear equations. **Int. J. Industrial Mathematics**, v. 6, n. 2, 2014.

MATLAB, version 8.6.0 (R2015b). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2015.

POTRA, F. A.; PTÁK, V. Nondiscrete Induction and Iterative Processes. **Research Notes in Mathematics**, 103, 1984.

WEERAKOON, S.; FERNANDO, T. G. I. A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence. **Applied Mathematics Letters**, v. 13, n. 8, p. 87-93, 2000.