

Modelagem da função de produção da soja

Modeling of soybeans production function

RESUMO

Eduardo Fornazieri Filho
dudufornazieri@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal
do Paraná, Cornélio Procópio,
Paraná, Brasil

Elenice Weber Stiegelmeier
elenicew@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal
do Paraná, Cornélio Procópio,
Paraná, Brasil

O objetivo deste trabalho é analisar os dados da produção de soja na região de Londrina/PR no período entre 1998 e 2016, com a finalidade de modelar uma função que estime a produção anual com base no capital investido e o total gasto com mão de obra. A modelagem ocorre com o auxílio da função de produção de Cobb-Douglas, que por sua vez é uma função não linear, logo utiliza-se o método dos mínimos quadrados para determinar os parâmetros da função. A função de produção modelada apresenta resultados satisfatórios, visto que admite uma margem de erro baixa.

PALAVRAS-CHAVE: Ajuste de curvas. Regressão não linear. Função Cobb-Douglas.

Recebido: 19 ago. 2019.

Aprovado: 01 out. 2019.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



ABSTRACT

The objective of this paper is to analyze the soybean production data in the Londrina / PR region between 1998 and 2016, with the purpose of modeling a function that estimates the annual production based on the invested capital and the total spent on labor. . The modeling takes place with the aid of the Cobb-Douglas function, which is a nonlinear function, so we use the least squares method to determine the parameters of the function. From the modeled production function it is possible to observe that the results obtained are close to the real data, assuming a satisfactory margin of error.

KEYWORDS: Curve adjustment. Nonlinear regression. Cobb-Douglas function.

INTRODUÇÃO

Existem muitas informações sobre a soja espalhadas pela literatura, dentre elas estão recomendações sobre seu cultivo, uso, meios de armazenagem, fins etc. Um dos registros mais antigos é datado de 2838 A.C., evidenciando o fato da soja ser um dos grãos mais antigos utilizados na agricultura. Considerando-se as divergências dos registros sobre a origem da soja, supõe-se que se originou ao leste da Ásia, na área central da China, posteriormente foi levada até a Coréia, passou pelo Japão e seu primeiro contato no continente europeu ocorreu em 1790, com seu plantio no Jardim Botânico Real, na Inglaterra. A chegada da soja no continente americano ocorreu em 1804, porém o Brasil só obteve seu primeiro contato com o grão em 1882, na Bahia (BONATO, 1987).

Em meados de 1970, a produção de soja tornou-se popular, com um estoque de 1,5 milhões de toneladas que aumentou em dez vezes uma década mais tarde. A partir desse período, o cultivo deste grão cresceu de forma exponencial no território brasileiro, especialmente na região central e atualmente foi registrado no ano de 2018 a produção de 116 milhões de toneladas.

Em nível internacional, o Brasil é responsável por 35% da produção de soja, é o segundo maior produtor, ficando atrás apenas dos Estados Unidos da América (Embrapa, 2019).

O objetivo geral do presente trabalho é coletar e analisar dados da produção de soja para a região de Londrina – PR. Com o auxílio da função de produção de Cobb-Douglas é possível realizar a modelagem da função de produção da soja para esta região.

Os seguintes objetivos específicos são propostos: estudo da função Cobb-Douglas, análise de dados da produção de soja, modelagem da função de produção de soja. Todo esse processo é conduzido com auxílio de diversas ferramentas matemáticas que permitem relacionar as variáveis selecionadas com a produção final de tal forma que é possível determinar qual fator exerce maior influência nos resultados finais.

METODOLOGIA

Primeiramente, apresentamos algumas ferramentas que serão utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho, são elas: a função Cobb-Douglas e o método dos mínimos quadrados.

FUNÇÃO COBB-DOUGLAS

De acordo com Isidoro (2018), no início do século XX, o economista Paul Douglas desenvolvia uma pesquisa que tinha por objetivo relacionar os fatores utilizados na economia americana com a produção final a nível nacional. Em determinado momento, Paul convidou Charles Cobb, um matemático, para avaliar e dar significado aos resultados obtidos até aquele momento.

A função Cobb-Douglas surge como fruto dessa parceria. Essa função foi amplamente utilizada em diversos setores da economia, desde pequenas

empresas até as grandes empresas e os resultados obtidos são considerados satisfatórios para períodos próximos do ano em que foram estimados (ISIDORO, 2018).

A função Cobb-Douglas é uma função não linear que relaciona o trabalho utilizado e o capital investido durante um período de tempo com a produção final, seus resultados permitem compreender qual a relação de cada variável com o produto e quais são os retornos à escala, decrescentes, constantes ou crescentes.

De modo geral, a função mostra ao produtor como ele deve combinar os fatores de produção para atingir a determinada demanda. A função é descrita da seguinte forma:

$$P(L, T) = A(L^b)(T^a). \tag{1}$$

onde L , T , A , b e a representam o capital investido, o trabalho utilizado, o fator multiplicativo, a elasticidade do capital e a elasticidade do trabalho, respectivamente. Neste trabalho, buscamos quais são os parâmetros que compõe a função quando aplicada nos dados da produção analisada durante dezoito anos.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O método dos mínimos quadrados é uma ferramenta matemática utilizada no ajuste de curvas. Possibilita determinar os parâmetros de uma função de modo que a curva ajustada cometa o mínimo de erro possível em relação aos pontos observados. Em resumo, o método minimiza a soma dos quadrados das distancias entre os dados estimados e observados.

Considere a Tabela 1, onde são descritos os dados observados.

Tabela 1 – Exemplo de tabela de dados quaisquer

x	y
x_1	y_1
...	...
x_n	y_n

Fonte: Guidorizzi (2000).

O objetivo nesta seção é encontrar a reta $\hat{y} = mx + q$ que melhor se aproxima de todos os pontos y_i observados na Tabela 1, com $i = 1, \dots, n$. Note que a substituição dos dados da Tabela 1 na reta $\hat{y} = mx + q$ gera um sistema linear de n equações e duas incógnitas:

$$S: \begin{cases} y_1 = mx_1 + q \\ \vdots \\ y_n = mx_n + q \end{cases}. \tag{2}$$

Sua forma vetorial é dada por:

$$S: \{ m\vec{v}_1 + q\vec{v}_2 = \vec{b} \}. \tag{3}$$

onde $\vec{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

Portanto, a solução do sistema (3) é solução do sistema auxiliar:

$$S: \begin{cases} m\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + q\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = \vec{b} \cdot \vec{v}_1 \\ m\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + q\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b} \cdot \vec{v}_2 \end{cases} \quad (4)$$

MODELAGEM DA FUNÇÃO

Os dados da produção de soja foram obtidos no site da Embrapa e CONAB. Os mesmos foram organizados na forma de tabelas, onde a coluna de despesas com lavoura é uma soma dos itens que representam o capital daquele ano. De modo análogo, a coluna denominada por despesas com trabalho é uma soma dos seus respectivos fatores daquele ano. Além disso, a terceira coluna apresenta o lucro para cada ano. A Tabela 2 ilustra os dados transformados em porcentagem, onde o primeiro ano foi considerado 100% e os demais como a variação percentual em relação ao ano de 1998.

Tabela 2 – Valores percentuais da estimativa de produção de soja entre 1998 e 2016.

Ano	Lavoura (L)	Trabalho (T)	Lucro bruto (P)
1998	100	100	100
1999	123	116	130
...
2016	586	633	774

Fonte: Autoria própria (2018).

Como o objetivo é modelar a função (1) não linear, utilizamos a técnica logarítmica de linearização. Considerando $b = 1 - a$, para que os retornos sejam constantes em relação a escala, obtemos a seguinte equação:

$$\ln Y = \ln A + a \ln x \quad (5)$$

onde $Y = \frac{P}{L}$ e $x = \frac{T}{L}$.

Observe que os valores para $\ln Y$ e $\ln x$ podem ser obtidos operando os dados da Tabela 2. Após este processo, ao substituir os valores na equação (5) obtemos um sistema de dezenove equações e duas incógnitas, $\ln A$ e a . Tal sistema, pode ser escrito na forma vetorial como:

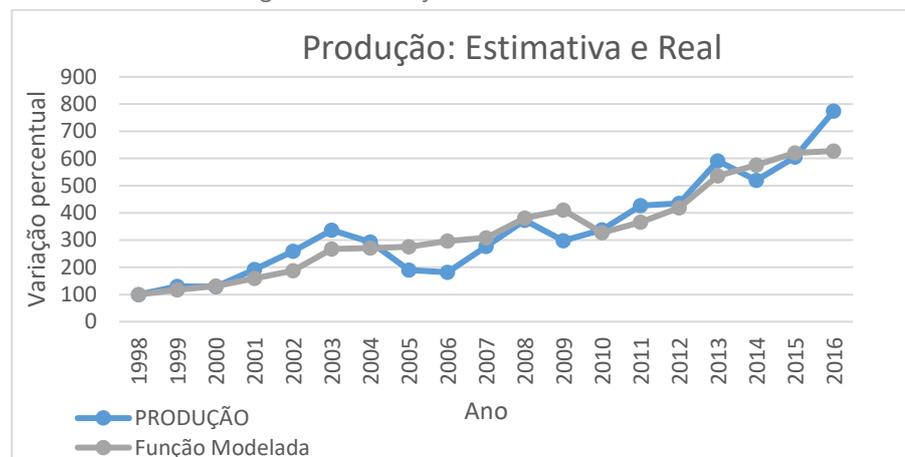
$$\vec{v}_3 = \ln A * \vec{v}_1 + a * \vec{v}_2 \quad (6)$$

onde $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \ln(x_1) \\ \vdots \\ \ln(x_n) \end{bmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{bmatrix} \ln(y_1) \\ \vdots \\ \ln(y_n) \end{bmatrix}$.

Aplicando o método dos Mínimos Quadrados no sistema (6), obtemos $a = 0,1187$, $b = 0,8813$ e $A = 1$. A substituição dos parâmetros na função (1) resulta na função de produção modelada. Notamos que a nova função apresenta parâmetros próximos aos dados coletados, com erro relativo de 16%. E, ainda, em alguns casos como nos anos de 1998, 1999, 2000, 2008, 2010, 2012 e 2015 a estimativa de produção é ainda mais expressiva. Na Figura 1 podemos observar a

função de produção modelada e os dados reais coletados. Note que a função modelada se aproxima de forma satisfatória dos dados coletados. A Figura 1 apresenta a função modelada em comparação com os dados coletados da produção da soja na região de Londrina-PR.

Figura 1 – Produção: Estimativa e Real



Fonte: Autoria própria.

CONCLUSÃO

Com base na análise realizada sobre a estimativa da produção de soja na região de Londrina, foi possível modelar uma função capaz de descrever a produtividade de soja para as safras seguintes de acordo com a quantidade de capital e trabalho utilizados. Podemos notar que os resultados obtidos são satisfatórios, pois são próximos dos dados reais admitindo um erro pequeno. Esses resultados permitem ao produtor avaliar com melhor eficácia a combinação entre capital e trabalho a fim de atingir a produção desejada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Fundação Araucária por ceder a bolsa de auxílio estudantil PIBIC-AF e incentivar a pesquisa nas Universidades públicas.

REFERÊNCIAS

BONATO, E. R.; BONATO, A. L. V. A soja no Brasil: história e estatística. **Embrapa Soja-Documents (INFOTECA-E)**, 1987.

CONAB. Companhia Nacional de Abastecimento. **Série Histórica – Custos – Soja _1998 – 2017**. 2017. Disponível em:
<https://www.conab.gov.br/index.php/infoagro/custos-de-producao/planilhas-de-custo-de-producao/item/1983-serie-historicacustos-soja-1998-2017>. Acesso em 24 mai. 2018.

EMBRAPA. Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária. **Soja em números 2017/2018**. 2018. Disponível em:
<https://www.embrapa.br/soja/cultivos/soja1/dadoseconomicos>. Acessado em: 09 dez. 2018.

ISIDORO, G. F. R. **A função de Cobb-Douglas aplicada a problemas de otimização restritos**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.