Um estudo sobre métodos de Programação Linear aplicados ao conceito de dualidade

A study on Linear Programming methods applied to the concept of duality

Nicole Renoste Silva
nicolerenostesilva@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

Leandro Waidemam
waidemam@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

Tatiane Cazarin da Silva
tatianecazarin@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

Michele Carvalho de Barros
mcbarros@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre o uso da Dualidade agregado ao Teorema de Complementaridade de Folga para resolução de problemas de Programação Linear. Para este fim será construído e modelado um par de problemas de programação linear primal-dual, a título de exemplo e discussão. O problema dual será resolvido com o auxílio do Método Simplex e, a partir da solução ótima de tal problema, são consideradas as condições de complementaridade de folga e, por sua vez, determinada a solução do problema primal. Além disso, a solução do problema primal, via dualidade, será associada com a respectiva solução por meio da interpretação do Método Gráfico. Dessa forma, por meio deste trabalho pôde-se observar que a solução numérica de um problema primal ou dual, pode ser obtida com uma ferramenta teórica alternativa (Dualidade) ao método clássico (Simplex) de problemas de programação linear.

PALAVRAS-CHAVE: Dualidade. Simplex. Programação Linear.

Recebido: 19 ago. 2019.

Aprovado: 01 out. 2019.

ABSTRACT

The aim of this paper is to present a study on the use of Duality added to the Complementarity Theorem of Linear Programming Problem Solving. To this end one of the primal-dual linear programming problems will be built and modeled, an example and discussion title. The dual problem will be solved with the aid of the Simplex Method and, from an optimal solution of the problem, will be considered as conditions of complementarity and, in turn, are determined as a solution of the primal problem. In addition, a solution of the primal problem via duality will be applied with the solution for the interpretation of the Graphic Method. Thus, through this work it may be that the numerical solution of a primal or dual problem can be obtained with a theoretical tool (Duality) to the classical pattern (Simplex) of linear programming problems.

KEYWORDS: Duality. Simplex. Linear Programming.

INTRODUÇÃO

A programação linear é um método científico que auxilia na tomada de decisões, e por sua vez, utilizada na solução dos mais diversos tipos de problemas, tais como engenharia, transporte e problemas de custos. Estas técnicas foram desenvolvidas inicialmente para necessidades militares em alocar recursos escassos às várias operações militares e às atividades dentro de cada operação de uma maneira efetiva. (Barbosa, 2004)

Dentro das vertentes que compõem a Pesquisa Operacional, a Programação Linear (PL) é um instrumento de alta relevância, pois proporciona um método eficiente para otimizar a função objetivo de um problema, sujeito a algumas restrições, atingindo uma solução ótima. Seu processo de montagem consiste em identificar o problema, verificar os recursos disponíveis e formular matematicamente os dados. (Passos, 2008)

A Programação Linear visa fundamentalmente encontrar a melhor solução para problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares. A sua grande aplicabilidade e simplicidade devem-se a linearidade do modelo. A tarefa da PL consiste na maximização ou minimização de uma função linear, denominada Função Objetivo, respeitando-se um sistema linear de igualdades ou desigualdades, que recebem o nome de Restrições do Modelo. (Marins, 2011).

Dessa forma considerando a importância e a dimensão da programação linear, o objetivo deste trabalho é utilizar essa metodologia para resolução de problemas de programação linear (PPL) com o auxílio da dualidade. Para isso, foram estudados os conceitos e fundamentos teóricos necessários para tal construção, e aplicados na resolução de um par de problemas teórico como exemplificação.

MATERIAIS E MÉTODOS

Este trabalho trata-se de um estudo teórico sobre Programação Linear (PL) aplicado a resolução de problemas lineares. Nesse sentido, foram estudados os conceitos iniciais de PL, um estudo teórico do Método Simplex e, por sua vez, conceitos relacionados à dualidade.

De acordo com Lins e Calôba (2006) para cada problema de programação linear, existe um outro, denominado dual do problema original, que por sua vez é chamado primal. Uma vez solucionado um deles, a solução do outro é imediata, não requerendo o uso de um algoritmo.

Dessa forma, será considerado um par de problemas primal-dual, sob o qual, a resolução de um dos problemas será obtida, primeiramente, a partir do método Simplex. O Simplex é um algoritmo que funciona de forma iterativa e possui uma sequência lógica: encontrar/construir a primeira solução básica viável; verificar se existem vértices adjacentes viáveis com melhoria potencial da função objetivo no conjunto viável; mover a solução para o vértice melhor e resolver o problema para este vértice; aplicar o teste da otimalidade e repetir o procedimento até encerrar o problema, ou seja, encontrar um ponto ótimo que satisfaça as restrições (Lins e Calôba, 2006). Este algoritmo foi estudado teoricamente, e para a aplicação, utilizou-se o software QM. Por fim, para alcançar a solução do par de problemas de programação linear primal-dual, o resultado apresentado pelo método simplex será associado com o resultado teórico oriundo do estudo das condições de complementaridade de folga e confirmado na visualização gráfica da solução. Dessa forma, a solução do problema associado será realizada sem a aplicação do algoritmo, mas com o uso das Condições de Folga Complementares.

Na sequência é realizada uma discussão sobre o Método Simplex, assim como apresentado o Teorema de Complementaridade de Folga.

O Método Simplex

O método Simplex é um algoritmo criado por George Dantzig que determina, numericamente, a solução ótima de problemas de programação linear. Para a resolução de um problema na forma padrão do tipo:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && c^T x \\ &\text{Sujeito a} && Ax \leq b \\ & && x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ e $c \in \mathbb{R}^{1\times n}$. O algoritmo Simplex consiste na execução dos 4 passos, descritos a seguir:

Passo 0: Inicialização: com solução básica factível x^0, t$\leftarrow 0$;

Passo 1: Direções simplex: construir Δx associada com não básica xj e calcular custo reduzido $\underline{cj} = c\ \Delta x$;

Passo 2: Otimalidade: se nenhuma direção melhora ($\nexists\ \underline{cj} > 0$ para max $\underline{cj} < 0$ para min), então parar, x^t é ótima; senão escolher nova direção Δx que melhora valor função objetivo; seja x_p a variável que entra na base;

Passo 3: Passo: se todas componentes de Δx forem não negativas, então parar, o modelo é ilimitado, senão determinar λ e escolher variável que deixa a base,

$$x_r \colon \lambda \leftarrow \left(-\frac{x_r}{\Delta x_r}\right);$$

Passo 4: Novo ponto e base: determinar nova solução $x^{t+1} = x^t + \lambda\, \Delta x^{t+1}$ e trocar x_r por x_p ; t = t + 1; ir para o Passo 1.

Associado a teoria da resolução de problemas de programação linear pelo Método Simplex, empregamos também a teoria da dualidade.

Teorema de Complementaridade de Folga

A fim de embasar o Teorema de Complementaridade de Folga apresenta-se, inicialmente, as Condições Complementares de Folga (CCF), conforme Lins e Calôba (2006).

Teorema 1. ***Condições Complementares de Folga-CCF****: Seja o par de problemas de programação linear Primal (P)-Dual(D), dado por:*

(P) Minimizar $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

sujeito a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i, i = 1, \dots, m$ (2)

$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$

e

(D) Maximizar $\sum_{i=1}^{m} b_i\, w_i$

sujeito a $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i \ \leq c_j, j = 1, \dots, n$ (3)

$w_i \ \geq 0, i = 1, \dots, m.$

Define-se que duas soluções básicas $\bar{x}$ e $\bar{w}$, respectivamente de (P) e (D), satisfazem às CCF, se:

1. *Para cada restrição i do primal:* $\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \bar{x}_j - b_i\right] . \bar{w}_i = 0, \ i = 1, \dots, m$
2. *Para cada restrição j do dual:* $\left[c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, \bar{w}_j\right] . \bar{x}_j = 0, \ j = 1, \dots, n.$

Com relação ao primeiro conjunto de CCF, cada variável natural do dual diferente de zero implica na ausência de folga na restrição primal, e vice-versa. Com relação ao segundo conjunto de CCF, cada variável natural do primal diferente de zero implica na ausência de folga na restrição dual, e vice-versa. Seguindo o teorema, introduzindo a variável de folga nos PPL Primal e Dual, e modificando as equações das restrições do primal e do dual, tem-se que

$$\sum a_{ij}\, x_j - x_{n+i} = b_i, i = 1, \dots, m \quad \rightarrow \quad \sum a_{ij}\, x_j - b_i = x_{n+i}$$
$$\sum a_{ij}\, w_i + w_{m+j} = c_j, j = 1, \dots, n \quad \rightarrow \quad w_{m+j} = c_j \ - \sum a_{ij}\, w_i.$$

E assim, as CCF ficam da seguinte forma:

1.Para cada restrição i do primal: $\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \bar{x}_j \ - b_i\right] . \overline{w_i} \ = 0, \ i = 1, \dots, m$ ficará da forma: $\overline{w_i} \,. \bar{x}_{n+i} \ = 0,$

2. Para cada restrição j do dual: $\left[c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, \overline{w_i}\right] \overline{x_j} = 0, \ j = 1, \dots, n$ ficará da forma: $\bar{x}j \,. \bar{w}_{m+j} \ = 0.$

Sendo, $\overline{w_i}$ e $\bar{w}_{m+j}$ as variáveis naturais e de folga do PPL Dual, e $\overline{x_j}$ e $\bar{x}_{n+i}$ as variáveis naturais e de folga do PPL Primal, respectivamente.

O Teorema de Complementaridade de Folga (TCF) formaliza a utilização das condições complementares de folga (CCF) na solução de PPL. O teorema a seguir é enunciado conforme Lins e Calôba (2006):

Teorema 2. ***Teorema de Complementaridade de Folga***: *$\bar{x}$ e $\bar{w}$ são soluções ótimas dos problemas (P) e (D), dado em (2), se e somente se forem viáveis e satisfazerem as Condições Complementares de Folga (CCF).*

Apresenta-se a seguir a formulação de um par de problemas primal-dual e sua resolução será obtida utilizando o algoritmo Simplex, assim como as condições complementares, já apresentadas no Teorema 1 e Teorema 2.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considere, a título de exemplificação, o par de problemas de programação linear Primal/Dual dado por

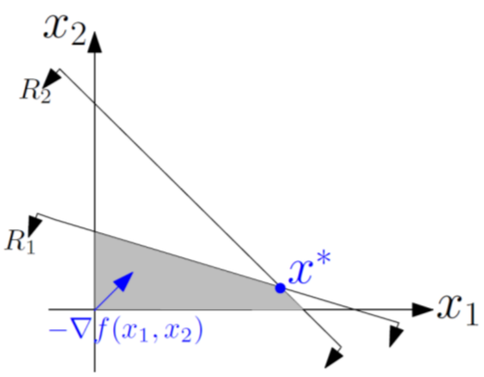
$$\begin{array}{ll} Mín\ -60x_1 - 72x_2 & Máx\ 70w_1 + 34w_2 \\ 6x_1 + 18x_2 \leq 70 & 6w_1 + 4w_2 \geq 60 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 34 & 18w_1 + 4w_2 \geq 72 \\ x_1, x_2 \geq 0 & w_1, w_2 \geq 0. \end{array} \tag{4}$$

Utilizando como auxílio o software QM e aplicando o Método Simplex para determinar a solução do problema dual tem-se que $w^* = (1{,}13.5{,}0{,}0)$. Dada a solução do dual, para este par de problemas, pode-se utilizar as CCF, apresentadas no Teorema 1, e obtêm-se as seguintes relações: considerando a solução w^* e utilizando o Teorema da Complementaridade de Folga, sabe-se que $w_3 = w_4 = 0$, logo tanto x_1 como x_2 podem ser zero ou diferente de zero. Em contrapartida, como $w_1 = 1$ e $w_2 = 13.5$, consequentemente $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$. Substituindo $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ recai-se no seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 6x_1 + 18x_2 = 70 & (R1) \\ 4x_1 + 4x_2 = 34 & (R2) \end{cases} \tag{5}$$

cuja solução é $x_1 = 6{,}9167$ e $x_2 = 1{,}5833$. Utilizando o Método Gráfico (Figura 1), ainda, é possível observar que o ponto ótimo é exatamente a interseção entre as duas restrições não constantes do problema, que compõem o conjunto viável, sendo o ponto $x^* = (6.9167{,}1.5833{,}0{,}0)$.

Figura 1: Solução ótima do PPL Primal – Método Gráfico



Fonte: Os autores, 2019

É possível observar que a partir do Teorema de Complementaridade de Folga e da solução ótima do Dual, obtida pela aplicação do Método Simplex, foi possível alcançar a solução do problema de programação linear Primal com maior facilidade, sem a necessidade de efetuar, novamente o algoritmo Simplex.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para a solução de um par de PPL Primal-Dual, o uso das CCF são extremamente vantajosas quando já se tem a solução de um dos problemas. No caso do PPL apresentado neste trabalho, a partir da solução do problema dual, obtida pelo método Simplex, a solução imediata do primal foi obtida a partir das CCF. Isso evidencia a importância e correlação entre os diversos conceitos teóricos trabalhados em PL, que podem ser aplicados na resolução de diversas aplicações que envolvem uma formulação linear e podem ser utilizados na resolução de problemas práticos de programação linear.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, G. M. **Utilização da programação linear na otimização de resultados de produção na empresa,** 2014.

LINS, M. P. E.; CALÔBA, G. M. **Programação linear: com aplicações em teoria dos jogos e avaliação de desempenho (Data Envelopment Analysis).** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

MARINS, F. A. S. **Introdução à pesquisa operacional**. Pró-Reitoria de Graduação, Universidade Estadual Paulista, 2011.

Notas de aula. **Algoritmo Simplex para Programação Linear I**. EA 044 Planejamento e Análise de Sistemas de Produção. UNICAMP. Disponível em: <http://www.dca.fee.unicamp.br/~gomide/courses/EA044/transp/EA_044_AlgoritmoSimplexI.pdf>.

PASSOS, E. J. P. F. Programação linear como instrumento da pesquisa operacional. São Paulo: Atlas, 2008.