https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2019

Estudo de dinâmica não-linear e Caos

Study of nonlinear dynamics and Chaos

Henry Otavio Fontana
henryfontana1@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Paraná, Brasil.

Thiago Gilberto do Prado
thiagoprado@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Paraná, Brasil.

Vinicius Piccirillo
piccirillo@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Paraná, Brasil.

Recebido: 19 ago. 2019.
Aprovado: 01 out. 2019.

RESUMO

Atualmente sabe-se que a dinâmica de muitos dos fenômenos da natureza apresentam alta complexidade podendo apresentar um comportamento caótico. Um dos grandes objetos de estudo dos últimos anos é a presença de comportamento caótico em sistemas determinísticos não-lineares, pois a característica determinística confere a ideia de que um estado final do sistema pode ser previsto e bem definido, no entanto, a alta sensibilidade de um sistema às condições iniciais pode levar a ocorrência de comportamentos não previsíveis a longo prazo e produzir resultados amplamente divergentes para tais sistemas dinâmicos. Assim o objetivo da pesquisa é predizer como um sistema modelado em tempo discreto, o qual possui dinâmica descrita por uma equação de diferenças não-linear de primeira ordem, vai evoluir com o progresso do tempo e estudar o comportamento caótico que o sistema apresenta para determinadas condições iniciais e parâmetros específicos. Para a investigação do sistema foi realizado uma pesquisa exploratória, e partindo dos conceitos adquiridos por meio da bibliografia estudada, obteve-se uma análise desse por meio da utilização de algumas ferramentas como mapa de Cobweb, diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov, os quais foram simulados com o uso do software MATLAB. A partir dessas ferramentas será determinado o comportamento do sistema para vários valores do parâmetro, bem como o comportamento caótico.

PALAVRAS-CHAVE: Sistema. Caótico. Determinística.

ABSTRACT

Currently, it is known that there are many phenomena of nature that present high complexity and may have a chaotic behavior. One of the major objects of study in recent years is the presence of chaotic behavior in nonlinear deterministic systems, as a deterministic feature gives an idea that a final state of the system can be predicted and well defined, however, a high sensitivity of a system under the initial conditions can lead to unforeseen changes over the long term and produce widely divergent results for these dynamic systems. Thus, the aim of the research is to predict how a discrete time modeled system, or which has characteristics defined for a first order nonlinear difference equation, will evolve over time and study the chaotic behavior that the system exhibits for certain initial conditions and specific parameters. For an investigation of the system an exploratory research was performed, and part of the concepts acquired through the studied bibliography were analyzed through the use of tools such as Cobweb map, bifurcation diagram and Lyapunov exponent, which were simulated with the use of MATLAB software. From these tools will be determined system behavior for various parameter values as well as chaotic behavior.

KEYWORDS: System. Chaotic. Deterministic.

INTRODUÇÃO

Caos em sistemas determinísticos não-lineares tem se tornado objeto de estudo muito divulgado nos últimos anos, uma vez que a característica determinística desses sistema remete uma ideia de previsão, no entanto, a alta sensibilidade de um sistema às condições iniciais ou parâmetros específicos, uma das principais características do Caos, pode levar a ocorrência de comportamentos não previsíveis a longo prazo, ou seja, pequenas diferenças nessas condições produzem resultados amplamente divergentes para tais sistemas dinâmicos, conferindo a esses sistemas a característica de instabilidade, o que indica que a natureza determinística desses sistemas não torna-os previsíveis (MARION; THORNTON, 2004, p. 170, grifo do autor).

O Caos determinístico é sempre associado com a não-linearidade do sistema (ALLIGOOD; SAUER, YORKE, 1996, p. 2, grifo do autor), portanto sistemas caóticos constituem um subconjunto da dinâmica não linear, sendo que todos esses sistemas possuem uma dependência sensível às condições iniciais, e apresentam características e comportamentos completamente distintos para longos períodos de tempo.

A modelagem de um sistema dinâmico pode ser contínua ou discreta. Um sistema em tempo discreto toma o estado atual como entrada e atualiza a situação produzindo um novo estado como saída, o qual é usado como valor de entrada para o momento seguinte (BOYCE; DIPRIMA, 2014, p. 93, grifo do autor). A equação que será estudada é a equação de diferenças não-linear de primeira ordem (equação da logística):

$$x(n+1) = f\big(k, x(n)\big) = k.x(n).\big(1 - x(n)\big) \qquad (1)$$

A partir de um x(1) estabelecido e variando o parâmetro k será analisado o comportamento de um fenômeno qualquer que possa ser modelado por essa equação.

MATERIAIS E MÉTODOS

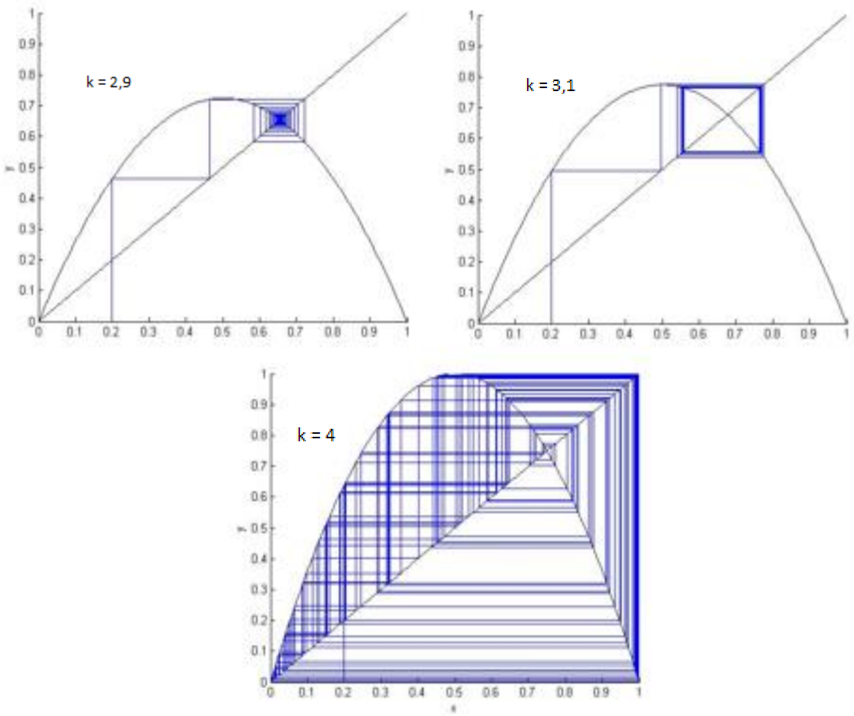
Para a investigação do modelo dado pela equação (1) foi realizada uma pesquisa exploratória com finalidade de analisar a existência de comportamento caótico, bem como outras características relacionadas, partindo de uma revisão bibliográfica composta por autores da área que envolve o estudo de sistemas dinâmicos, de Caos, e também de autores da área de aplicação de métodos numéricos utilizando o MATLAB para análise gráfica.

Partindo dos conceitos apresentados por esses autores, será feito uso do software interativo MATLAB de alta performance voltado para o cálculo numérico, para obter e comparar resultados. Inicialmente foi simulado um Mapa de Cobweb, em seguida um Diagrama de Bifurcação e por último um gráfico do Expoente de Lyapunov nesse software para questionamento e estudo do comportamento do modelo dado pela equação (1), também para estudo do Caos presente.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Uma das formas de apresentar a solução da equação (1) é por meio do Mapa de Cobweb, um gráfico linear por partes consistindo em segmentos de retas verticais e horizontais sucessivos que representam a sequência para solução do problema em determinado número de iterações. Para alguns valores específicos do parâmetro k é possível visualizar algumas diferenças no comportamento final do modelo.

Figura 1 - Mapas de Cobweb



Fonte: ALLIGOOD, Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, 1996.

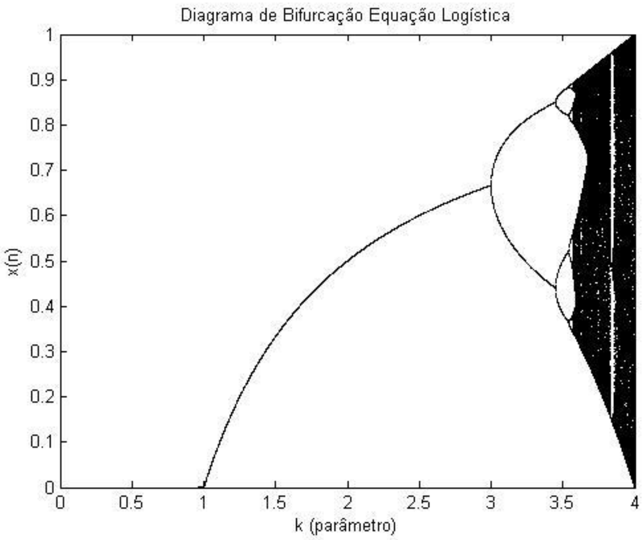
Mapa de Cobweb para valores de k=2,9, k=3,1 e k=4.

Para a condição inicial x(1) = 0,2 e k equivalente a 2,9 observa-se pelo **Mapa de Cobweb** que a solução do modelo resulta em um valor final de 0,655 em poucas iterações. Nesse caso observa-se que depois de um número de iterações o resultado final permanece constante, sempre resultando no mesmo valor, ou seja, o período para k = 2,9 é de um ciclo. No entanto, para k = 3,1 o valor de x oscila entre 0,558 e 0,765 com poucas iterações envolvidas e, portanto, ocorre uma duplicação de período havendo a presença de dois ciclos, já para k = 4 não é possível definir a quantidade de períodos.

O fato da quantidade de períodos para k = 4 ser incontável pela técnica do Mapa do Cobweb pode indicar Caos e a mudança no números de soluções para a equação quando varia-se k é denominada de bifurcação (MARION; THORNTON, 2004, p. 172, grifo do autor).

A mudança no comportamento do sistema será analisada por meio do **diagrama de bifurcação**, o qual é uma representação qualitativa do comportamento das órbitas, sendo possível determinar para quais valores de k haverá uma duplicação do período e fornecendo uma visualização mais geral do modelo.

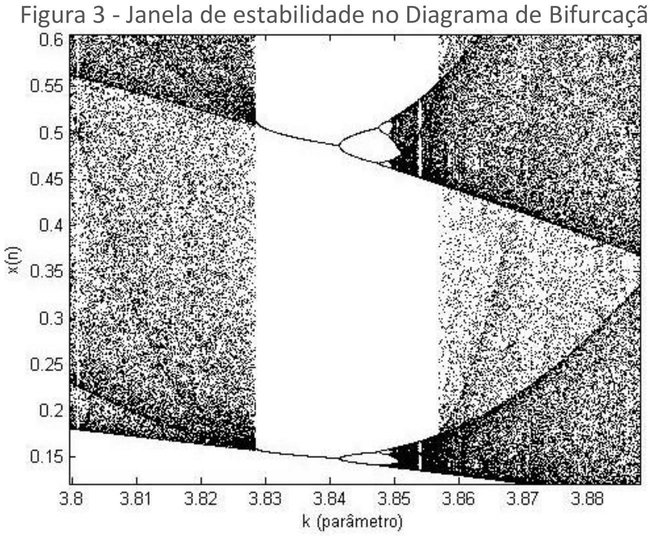
Figura 2 - Diagrama de Bifurcação



Fonte: MARION, Classical Dynamics of Particles and Systems: 5. Ed., 2004.

É visível pelo diagrama da figura 2 que para valores de k entre 0 e 1 as soluções resultam em um valor final igual a zero, o qual é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável, para valores entre 1 e 3 resultam em valores finais variados sendo soluções de equilíbrio também assintoticamente estáveis, enquanto para k maior que 3 a solução oscila entre dois valores distintos até ocorrer outras duplicações de período. Vários novos interessantes efeitos emergem a partir do diagrama de bifurcação indicando regiões e janelas de estabilidade, bem como a presença de dinâmica caótica do sistema. Na figura 3 abaixo é retratado a janela de estabilidade presente para valores de k entre 3,83 e 3,85. Mais da análise do diagrama de bifurcação será discutida após essa figura.

Figura 3 - Janela de estabilidade no Diagrama de Bifurcação



Fonte: MARION, Classical Dynamics of Particles and Systems: 5. Ed., 2004.

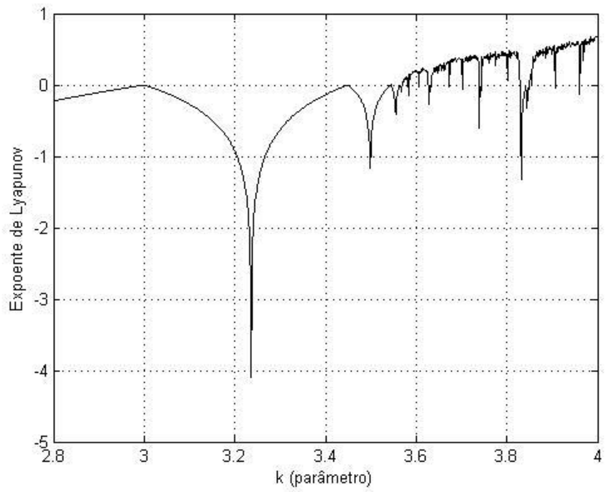
Na figura 2 percebe-se que a primeira bifurcação ocorre em k = 3 e devido a forma da cisão demonstrada é denominada bifurcação forquilha. Bifurcações e duplicações de período continuam até que em k = 3,57 aparece um número infinito de ciclos (MARION; THORNTON, 2004, p. 172, grifo do autor).

As múltiplas ocorrências de bifurcações por duplicação do período implicam na presença de uma rota para o Caos via duplicação de período. Essa infinidade de resultados indicados a partir de k = 3,57 mostram que Caos ocorre para diversos valores de k entre 3,57 e 4, mas há ainda janelas de movimento periódico, com uma notável janela em k = 3,84, a qual está representada na figura 3.

Uma forma de quantificar a dependência sensitiva em condições iniciais para comportamento caótico é por meio do **Expoente de Lyapunov** (MARION; THORNTON, 2004, p. 176, grifo do autor). Se n é a quantidade de iterações, então o Expoente de Lyapunov (λ) é definido como:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left|\frac{d\big(f(x(i))\big)}{dx}\right|\right)\right) \quad (2)$$

Figura 4 - Expoente de Lyapunov



Fonte: MARION, Classical Dynamics of Particles and Systems: 5. Ed., 2004.

O Expoente de Lyapunov é um indicador de Caos, o valor de λ é zero quando ocorre alguma bifurcação e a solução torna-se instável, é possível ver pela figura 4 que para k = 3 o expoente assume valor zero e, portanto, há uma bifurcação. Pontos assintóticos no gráfico indicam pontos em que ocorre super estabilidade, isto implica em λ = -∞.

Para valores de λ positivo haverá a presença de Caos, o que ocorre primeiramente para k = 3,57. A partir de k = 3,57 percebe-se que para alguns valores k o valor do expoente retorna a assumir valores negativos e orbitas periódicas ocorrem entre o comportamento caótico, ou seja, há janelas de estabilidade que interrompem o comportamento caótico (MARION; THORNTON, 2004, p. 177, grifo do autor).

CONCLUSÃO

Com os resultados apresentados constatou-se que um sistema dinâmico modelado pelo modelo discreto dado pela equação (1), a qual é uma equação não-linear, apresenta Caos para determinados valores do parâmetro k. Verificou-se a importância da análise gráfica para tal conclusão, em especial a importância do Diagrama de Bifurcação e do conceito e análise do Expoente de Lyapunov, os quais também podem ser empregados para o estudo de sistemas contínuos.

Pelo Diagrama de Bifurcação é possível obter os resultados finais para uma quantidade grande de valores de k sendo possível analisar a dinâmica com bastante exatidão com o uso do MATLAB. Um fator de grande importância no estudo da dinâmica caótica é a análise do Expoente de Lyapunov, o qual informará se há ou não a presença de Caos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) pela oportunidade de desenvolver esse trabalho, aos professores Thiago Gilberto do Prado (orientador) e Vinicius Piccirillo (co-orientador) por acompanharem o trabalho efetivamente, a minha amiga e colega de iniciação científica Jessica Scheffer e também a minha família por todo o apoio.

REFERENCIAIS

ALLIGOOD, K.T.; SAUER, T.D.; YORKE, J.A. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, p.1-27, 1996.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C.; Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno: 9. Ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2014, p.93-101.

THORNTON, S.T.; MARION, J.B.; Classical Dynamics of Particles and Systems: 5. Ed., 2004, p. 144-178.

YANG, W.Y. et al. Applied Numerical Methods Using MATLAB, 2005.

PALM III, W.J.; Introdução ao MATLAB para engenheiros: 3. Ed. 2013.