

## Implementação de um código computacional para simular a deflexão de lajes em concreto submetidas à carregamentos distribuídos e concentrados

## Implementation of a computational code to simulate concrete slabs displacement due to distributed and concentrated loading

### RESUMO

**Luiz Eduardo Gonçalves de Mattos**  
[luizmattos@alunos.utfpr.edu.br](mailto:luizmattos@alunos.utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

**Cosmo Damião Santiago**  
[cosmo@utfpr.edu.br](mailto:cosmo@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

**Rodolfo Krul Tessari**  
[rtessari@utfpr.edu.br](mailto:rtessari@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

O foco do presente trabalho é implementar um código computacional para simular a deflexão de placas e lajes em concreto submetidas a cargas normais ao plano utilizando a Equação bidimensional de Lagrange. O modelo matemático é discretizada com o Método das Diferenças Finitas, em malhas uniformes, com condição de contorno de Neumann. O sistema de equações algébricas é resolvido com o método de Gauss-Seidel. Foram feitas análises de alguns estudos de caso com diferentes condições de apoio nas bordas e aplicações de carregamento em lajes. Os resultados mostram que o código computacional reproduz muito bem a solução numérica, concordando com a literatura.

**PALAVRAS-CHAVE:** Deflexão de lajes. Equação de Lagrange. Diferenças Finitas. Simulação computacional.

**Recebido:** 19 ago. 2019.

**Aprovado:** 01 out. 2019.

**Direito autorial:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



### ABSTRACT

The objective of the present paper is the computational simulation of plates and concrete slabs displacement when subjected to loads normal to the plane using the two-dimensional Lagrange's Equation. The mathematical model is discretized by the Finite Difference Method, in uniform grid, with Neumann's boundary condition. The system of algebraic equations is solved by the Gauss-Seidel Method. Study cases with different support conditions and loading applications on slabs were run. Results show that the computational code reproduces the numerical solution very well, agreeing with the literature.

**KEYWORDS:** Slabs displacement. Lagrange's Equation. Finite Difference. Computational simulation.

## INTRODUÇÃO

Grande parte dos edifícios da construção civil utiliza do método da construção de lajes como estrutura de teto, ou de suporte a piso de um pavimento superior. Este método de obra é de grande relevância no campo de atuação da Engenharia Civil, em especial aos que envolvem os cálculos estruturais, uma vez que a laje tem a função de receber carregamentos e distribuí-los às vigas e pilares de suporte. Em geral, as lajes são feitas em concreto armado e seu dimensionamento deve atender, com segurança, os futuros esforços decorrente das cargas aplicadas ao longo da vida útil da edificação. Quando realizada de forma correta, garante que o edifício permaneça em perfeitas condições de utilização assegurando a integridade de seus usuários.

Apesar de não se tratar de um material homogêneo, elástico, isótropo e fisicamente linear, o comportamento da laje em concreto armado é baseado na Teoria da Elasticidade e na Teoria das placas delgadas (Teoria de Kirchhoff), pois trata-se de um elemento estrutural sujeito apenas a deslocamentos infinitesimais. Desta forma, é possível estimar seus deslocamentos devido a um carregamento, uma vez que não ocorre a fissuração do concreto para baixos níveis de deformação no material, Timoshenko et al (1959). Assim pode-se definir a Equação de equilíbrio das placas delgadas, também conhecida como Equação de Lagrange, ou Equação da Laje, que é o modelo matemático que melhor descreve a deflexão de lajes, e que pode ser utilizada para realizar simulações em computador voltadas ao cálculo estrutural e ao dimensionamento de estruturas em concreto armado, como realizado por Jones et al (2009), Fernandes et al (2002) e Szilard (2004).

## MODELO MATEMÁTICO

A deflexão de lajes e placas modelada pela Equação de Lagrange na sua forma bidimensional é dada por:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1)$$

Onde  $\omega$  refere-se ao deslocamento na direção da coordenada espacial vertical,  $q$  é a carga aplicada no ponto na mesma direção,  $D$  é o módulo de rigidez a flexão da placa, e  $x$  e  $y$  referem-se as direções espaciais, ou as coordenadas horizontais do plano.

O módulo de rigidez a flexão,  $D$ , é obtido a partir de uma equação que relaciona o módulo de elasticidade longitudinal,  $E$ , da estrutura e o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , sendo ela:

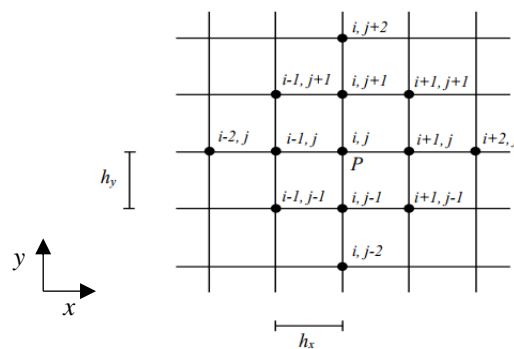
$$D = \frac{E}{12(1 - \nu^2)} \quad (2)$$

## MODELO NUMÉRICO

Para resolver numericamente a Eq. (1), o Método das Diferenças Finitas – MDF será usado para aproximar as derivadas em um domínio quadrado que é discretizado fazendo-se uso de malha estruturada e uniforme por direção. As simulações foram consideradas a partir de um sistema de coordenadas cartesianas particionado em um número de nós (ou pontos) dado por  $N=N_xN_y$ , onde  $N_x$  e  $N_y$  são o número de pontos nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, incluindo os contornos. Cada ponto é definido na malha computacional como  $(x_i, y_j) = ((i - 1)h_x, (j - 1)h_y)$ , em que  $i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y, h_x = Lx/(N_x - 1), h_y = Ly/(N_y - 1)$ , onde  $h = h_x = h_y$ , e  $h_x$  e  $h_y$  são o tamanho dos elementos da malha nas direções  $x$  e  $y$ , ou a distância entre dois pontos consecutivos, como mostrado na Figura 1.

A Figura 1 ilustra a localização dos pontos usados na discretização, na qual o ponto “P” refere-se ao ponto central da aplicação da carga e da deflexão.

Figura 1 - Estêncil computacional



Fonte: Autoria própria (2019).

Com as aproximações das derivadas com o MDF e as respectivas substituições na Eq. (1), tem-se um sistema de equações algébricas do tipo  $A\phi = f$ , que pode ser solucionado utilizando métodos iterativos. Os pontos cardeais da Fig. 1 estão associados aos índices da malha computacional da seguinte  $a_{P,p}=i,j, a_{P,n} = i, j + 1, a_{P,s} = i, j - 1, a_{P,e} = i + 1, j, a_{P,w} = i - 1, j, a_{P,nn} = i, j + 2, a_{P,ss} = i, j - 2, a_{P,ee} = i + 2, j, a_{P,ww} = i - 2, j, a_{P,ne} = i + 1, j + 1, a_{P,nw} = i - 1, j + 1, a_{P,se} = i + 1, j - 1$  and  $a_{P,sw} = i - 1, j - 1$ . Agrupando os termos, adotando  $\Delta x = \Delta y$ , e fazendo as simplificações necessárias obtém-se um sistema de equações da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_{P,p}\omega_p &= a_{P,n}\omega_n + a_{P,s}\omega_s + a_{P,e}\omega_e + a_{P,w}\omega_w + a_{P,nn}\omega_{nn} + \\ & a_{P,ss}\omega_{ss} + a_{P,ee}\omega_{ee} + a_{P,ww}\omega_{ww} + a_{P,ne}\omega_{ne} + a_{P,nw}\omega_{nw} + \\ & a_{P,se}\omega_{se} + a_{P,sw}\omega_{sw} + b_p, \end{aligned} \quad (3)$$

em que os  $a_i$  são os coeficientes da matriz e  $b_i$  é o termo fonte. Os coeficientes internos são

$$a_{P,p} = -20, \quad a_{P,n} = a_{P,s} = a_{P,e} = a_{P,w} = -8, \quad (4)$$

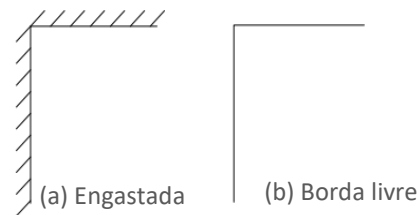
$$a_{P,nn} = a_{P,ss} = a_{P,ee} = a_{P,ww} = 1, \quad a_{P,ne} = a_{P,nw} = a_{P,se} = a_{P,sw} = 2, \quad (5)$$

$$b_p = \frac{P}{D} (\Delta x)^4 \quad (6)$$

A Eq. (3) é válida para os pontos internos do domínio computacional. Os coeficientes nos contornos (ou fronteiras) são definidos conforme o tipo de apoio da laje.

Em situações reais, uma estrutura de laje tem diferentes condições de suporte em suas bordas. No presente trabalho foram feitos estudos para lajes com bordas engastadas e livres. Os casos analisados estão ilustrados na Figura 2.

Figura 2 – Tipos de apoio considerados



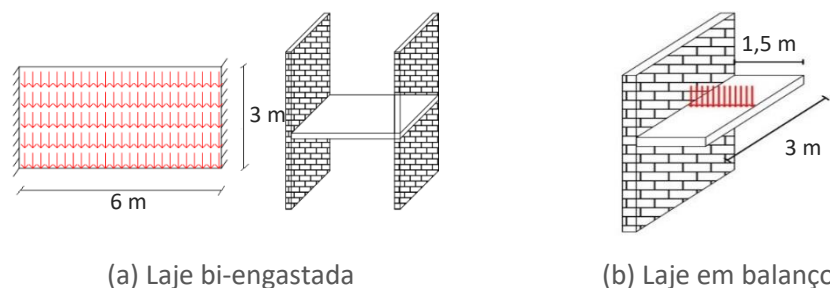
Fonte: Autoria própria (2019).

É relevante fazer considerações cerca das condições de contorno adotadas de acordo com cada tipo de apoio, por exemplo, no caso de bordas engastadas, Figura 2(a), não há deflexão e nem rotação dos pontos, que é impedida devido a um esforço de momento fletor negativo gerado. No caso de bordas livres, Figura 2(b), pode ocorrer movimentos de rotação e deflexão, uma vez que não existe nenhuma estrutura de apoio aplicada. Desta forma, os coeficientes nos pontos de fronteira serão obtidos a partir de aproximações numéricas de acordo com cada caso analisado.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

A primeira laje analisada (a) refere-se a uma laje engastada nas bordas esquerda e direita e com as outras duas bordas livres. O carregamento foi aplicado em todo o plano. A segunda laje (b) estudada é engastada apenas na borda esquerda, e o restante é livre. Este método de construção é muito utilizado, por exemplo na execução de sacadas e varandas, e é conhecida como laje em balanço. O carregamento foi aplicado em uma linha que passa pelo centro do plano e é paralela à coordenada  $x$ . A representação das lajes e suas dimensões, tal como os carregamentos aplicados são observadas na Figura 3 a seguir:

Figura 3 - Geometria das lajes estudadas



Fonte: Autoria própria (2019).

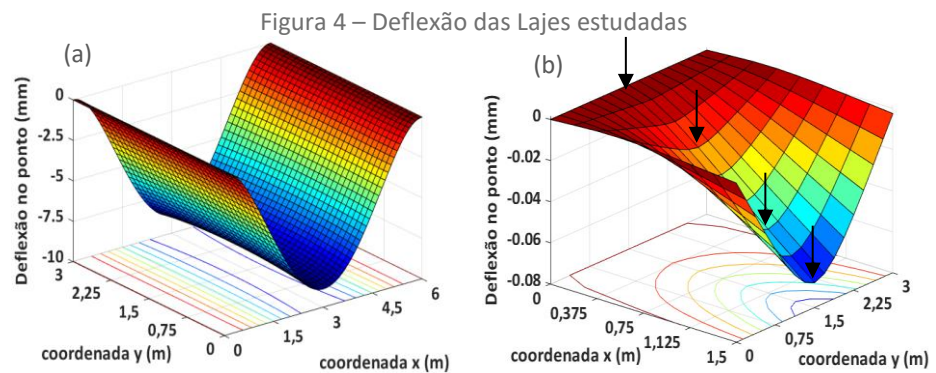
Os dados referentes as propriedades materiais das lajes, carregamentos e o número de pontos adotados na malhas computacionais estão presentes na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados usados nas simulações das lajes

	$E$ (KN/m <sup>2</sup> )	$\nu$	$q$ (KN)	$N_x$	$N_y$	$L_x$ (m)	$L_y$ (m)
(a)	$35 \cdot 10^6$	0,2	8	65	33	6	3
(b)	$35 \cdot 10^6$	0,2	7	17	33	1,5	3

Fonte: Autoria própria (2019).

A Figura 4 mostra a deflexão causada nas lajes analisadas devido aos carregamentos previstos.



Fonte: Autoria própria (2019).

Foi observado que a deflexão causada na laje em balanço, Figura 4 (a), gerou um comportamento na sua geometria que tomou uma forma semelhante à uma sela, isso devido aos engastes e ao coeficiente de Poisson adotado, que permite a deformação transversal em relação à direção longitudinal da carga aplicada. O valor máximo atingido de deflexão nesta laje foi de 8,4246mm. No caso da laje em balanço, Figura 4 (b), observou-se que a deflexão gerada pelo carregamento imposto na linha de simetria da laje teve comportamento não linear, e os pontos nos quais foram aplicados os carregamentos, a deflexão foi acentuada, chegando ao máximo de 0,0679mm na borda oposta ao engaste. Além disso, verificou-se que os pontos localizados nas bordas engastadas de ambas as lajes, não sofreram nem deflexão e nem rotação. Estes resultados são bastante semelhantes à situações reais.

## CONCLUSÃO

No presente trabalho foi feito um código computacional para resolver a equação diferencial parcial que simula a deflexão de lajes submetidas a carregamentos perpendiculares ao plano, conhecida como Equação de Lagrange. O modelo matemático foi discretizado com Método das Diferenças Finitas e o sistema de equações algébricas resultante foi resolvido com o Método de Gauss-Seidel. Para verificar a consistência do código desenvolvido, foram simulados dois casos com diferentes condições de carregamento e bordas. O código computacional desenvolvido gerou resultados semelhantes a situações reais de

lajes, tais como obtidos por Roknuzzaman et al (2015). Observou-se que a deflexão da laje varia de acordo com os dados construtivos adotados, o tipo de apoio adotado na borda e ao valor do carregamento aplicado previsto. Notou-se que lajes com maiores vãos geram deflexões maiores em relação à lajes com vãos mais curtos. Além disso, quanto mais pesado for o carregamento previsto em projeto, maior será a deflexão causada na laje. Assim, as simulações numéricas realizadas mostraram-se eficazes na geração de gráficos e resultados referentes à deflexão de lajes.

### AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Cosmo D. Santiago, meu orientador, e ao Prof. Rodolfo Krul Tessari, meu coorientador, pelas grandes contribuições e ensinamentos necessários para o desenvolvimento de toda a pesquisa. Os autores agradecem a UTFPR pelo apoio financeiro do Programa Institucional de Iniciação Científica (PIBIC-UTFPR).

### REFERÊNCIAS

G. R. FERNANDES, G. R.; VENTURINI, W.S. **Stiffened plate bending analysis by the boundary element method**. Computational Mechanics, 28, pp. 275-281, 2002.

JONES, J et al. **Finite difference analysis of simply supported RC slabs for blast loadings**. Engineering Structures, v. 31, n. 12, p. 2825-2832, 2009.

MD. ROKNUZZAMAN; MD. BELAL HOSSAIN; MD. RASHEDUL HAQUE; DR. TARIF UDDIN AHMED. **Analysis of Rectangular Plate with Opening by Finite Difference Method**. American Journal of Civil Engineering and Architecture, vol. 3, no. 5 (2015): 165-173. doi: 10.12691/ajcea-3-5-3.

SZILARD, R. **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods**, John Wiley & Sons, Inc., United States edition, 2004.

TIMOSHENKO, STEPHEN, P; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. McGraw-hill, 1959.