

## Solução Analítica e Numérica do escoamento Laminar em Regime Permanente De Fluido Newtoniano em Tubo Circular

### Analytical and Numerical Solution of Steady-State Laminar Flow of a Newtonian Fluid in a Circular Tube

#### RESUMO

**Ulisses Paulo Costa Filho**  
[ulissesbqd@gmail.com](mailto:ulissesbqd@gmail.com)  
Centro de Pesquisas em Reologia de Fluidos Newtonianos e Não-Newtonianos, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

**Alan Lugarini de Souza**  
[alansouza@utfpr.edu.br](mailto:alansouza@utfpr.edu.br)  
Centro de Pesquisas em Reologia de Fluidos Newtonianos e Não-Newtonianos, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

**Admilson Teixeira Franco**  
[admilson@utfpr.edu.br](mailto:admilson@utfpr.edu.br)  
Centro de Pesquisas em Reologia de Fluidos Newtonianos e Não-Newtonianos, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

Este trabalho tem como objetivo discutir diferenças e semelhanças nas soluções analítica e numérica, introduzindo análises que demonstram a parte matemática de um fluido que escoar em regime completamente desenvolvido com escoamento laminar, compondo a parte da solução analítica, e a parte experimental. Após o desenvolvimento teórico, desenvolve-se as simulações para se obter as soluções numéricas, identificando malhas uniformes e não-uniformes na superfície do tubo, bem como diferentes velocidades de escoamento para cada número de Reynolds específico. Utilizou-se software específico (STAR-CCM+ 2019.2) para executar as soluções numéricas, na parte experimental, deixando evidente a formação do fluido completamente desenvolvido no tubo e as comparações gráficas entre os dois tipos de soluções.

**PALAVRAS-CHAVE:** Soluções analíticas e numéricas, completamente desenvolvido, escoamento laminar, número de Reynolds.

#### ABSTRACT

This work aims to discuss differences and similarities in the analytical and numerical solutions, introducing analyzes that demonstrate the mathematical part of a fluid that flows in a completely developed regime with laminar flow, that compounds the analytical solution. After theoretical discussion, simulations were made to obtain numerical solutions, uniform identification and non-uniform meshes on the pipe surface, as well as different flow rates for each specific Reynolds number. A specific software was used (STAR-CCM+ 2019.2) to perform the numerical solutions, making clear the formation of the completely developed fluid in the tube and the graphic comparison between the two types of solutions.

**KEYWORDS:** Analytical and numerical solutions, completely developed, laminar flow, Reynolds number.

**Recebido:** 19 ago. 2019.

**Aprovado:** 01 out. 2019.

**Direito autoral:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

As ferramentas de CFD (Computational Fluid Dynamics) objetivam o estudo de um fluido que escoar em um elemento modelado em CAD (Computer Aided Design) para se observar como esses elementos se comportam quando sob diversas situações diferentes. Hirsch (2007) comenta que o termo “simulação” é utilizado para enfatizar que as análises efetuadas são através do computador, transformando todo o espaço de análise em um espaço virtual. Esse espaço virtual favorece a utilização de todos os métodos cabíveis para garantir níveis consideráveis de segurança, uma vez que é possível impor situações extremas, pois os elementos ainda não foram, de fato, construídos. Ainda sob a análise de Hirsch (2007), a importância do CFD foi ainda maior com o passar do tempo devido aos melhoramentos de hardware que os computadores detiveram. Na indústria houve um ganho de tempo extremamente grande pois seria possível realizar diversas operações que pudessem melhorar os produtos, melhorar o tempo de design e se precaver de problemas antecipadamente. Exemplo fatídico é nas indústrias aeronáuticas, onde houve um grande aproveitamento de melhorias na performance de turbinas em função do desenvolvimento de novos algoritmos e cálculos inseridos nos softwares. Quando utilizamos os dois tipos de soluções – analíticas e numéricas – obtemos resultados e benefícios significativos por envolver um processo mais eficaz, ágil e preciso. Nesse trabalho, foram realizadas as soluções analítica e numérica para argumentar a respeito do escoamento laminar de um fluido completamente desenvolvido dentro de um tubo circular. A utilização da solução analítica é sob o foco de referenciar um resultado teórico, em que seja possível criar um ponto de partida para uma análise experimental, além de ser um resultado mais seguro para problemas mais simples. Na solução numérica adotou-se uma análise do tubo de forma axissimétrica e malhas que variam em sua superfície de maneira uniforme e não-uniforme. Adotando os procedimentos da solução analítica e numérica em conjunto, foi possível prever erros residuais, observação do comportamento da velocidade do fluido na parede e no centro do tubo, assim como a variação da velocidade desse mesmo fluido em todo o processo.

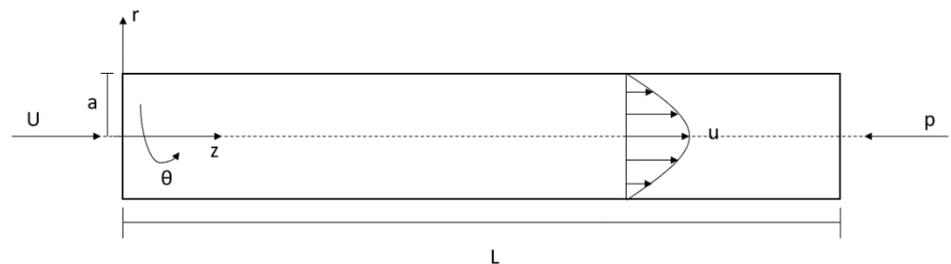
## MATERIAIS E MÉTODOS

Para a execução da solução numérica, utilizou-se o software STAR-CCM+ 2019.2, do qual possui algumas atualizações de melhor desempenho em simulação e ferramentas, ainda que quase sem alteração, com menores erros de cálculo em seu sistema, facilitando a performance de processamento. A ciência abordada para a solução analítica é a mecânica dos fluidos, abordando as condições de contorno do tubo, condições iniciais de escoamento, utilizando a condição de conservação da massa e do momento do fluido em coordenadas polares, principalmente por se tratar de um movimento do fluido em tubo circular. Desprezou-se velocidades em eixos diferentes do escopo do estudo, assim como movimentos tridimensionais do fluido.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Antes de iniciarmos a análise matemática, houve a necessidade de se visualizar a situação que se estima atingir. Como se trata de um fluido completamente desenvolvido, analisamos, a partir da figura 1, que a velocidade dentro do tubo possui um formato hiperbólico. Tal formato será comprovado pela solução analítica. Esse formato indica que a velocidade no centro do tubo será máxima e com valor finito e nas paredes do tubo, devemos encontrar velocidade nula. Teremos uma velocidade que varia apenas no eixo  $z$ , enquanto as outras velocidades no eixo  $r$  e  $\theta$  não sofrerão variação e serão nulas.

Figura 1 - Fluido completamente desenvolvido



Através das equações de Navier-Stokes para cada eixo a ser estudado, sendo os eixos  $r$ ,  $z$  e  $\theta$ , teremos diferentes condições matemáticas a serem aplicadas nas expressões da conservação de massa e conservação do momento. Por meio dessas condições, foi possível extrair expressões normalizadas capazes de excluir as unidades físicas e conseguirmos generalizar essas expressões para outros sistemas com dimensões diferentes. As principais expressões do nosso estudo são expressas pelas equações (1), (2), (3), (4) e (5).

O comprimento em relação ao diâmetro adotado nesse estudo será:

$$\frac{L}{D} \sim 0,06Re \quad (1)$$

A velocidade normalizada será:

$$-\frac{r}{\mu} \frac{\Delta p}{L} = \frac{r}{dr^2} \frac{d^2 v_z}{dr^2} \quad (2)$$

$$v_z = -\frac{r^2}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (3)$$

$$v_z = \frac{a^2}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (4)$$

$$v_z^* = \frac{v_z}{U_m} = \frac{\frac{a^2 \Delta p}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)}{\frac{Q}{A}} \quad (5)$$

$$v_z^* = 2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (6)$$

A tensão de cisalhamento poderá ser escrita como:

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} = \mu \frac{d}{dr} \left[ 2U \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \quad (7)$$

$$\tau^* = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{16r^*{}^2}{Re} \quad (8)$$

A pressão normalizada será:

$$\Delta p = \frac{128\mu L Q}{\pi D^4} \quad (9)$$

$$\Delta p^* = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{256\mu L Q}{\pi D^4 \rho U^2} = \frac{4096\mu L}{\rho U} \quad (10)$$

Através da solução numérica, utilizando malhas uniformes e não-uniformes, foi possível efetuar diversas combinações de malhas na divisão radial e horizontal, sendo uma delas a melhor em termos de custo de processamento e tempo. As figuras 2, 3 e 4 evidenciam que a velocidade, desde o início do comprimento do tubo até o final (ou próximo do final), a velocidade de escoamento aumenta até atingir um valor finito máximo. Quando se efetua a razão entre a velocidade máxima e a velocidade média, próximo do final do tubo, encontra-se que a velocidade máxima resulta o dobro da velocidade média, conforme a expressão (2). Nas figuras (2), (3) e (4) é possível perceber que há interceptação das curvas das velocidades na solução numérica e analítica.

Figura 2 - Comparação das velocidades - Reynolds 10

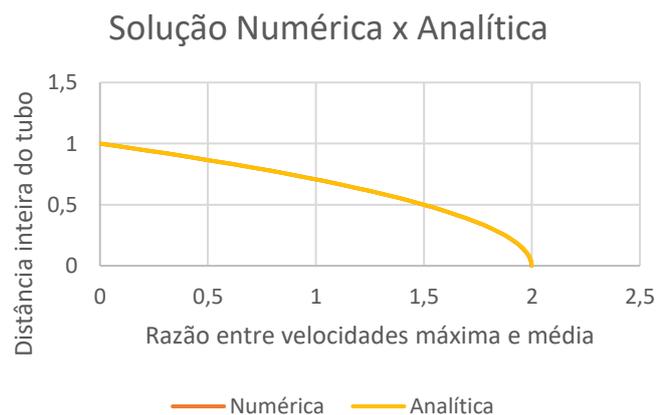


Figura 3 – Comparação das velocidades – Reynolds 100

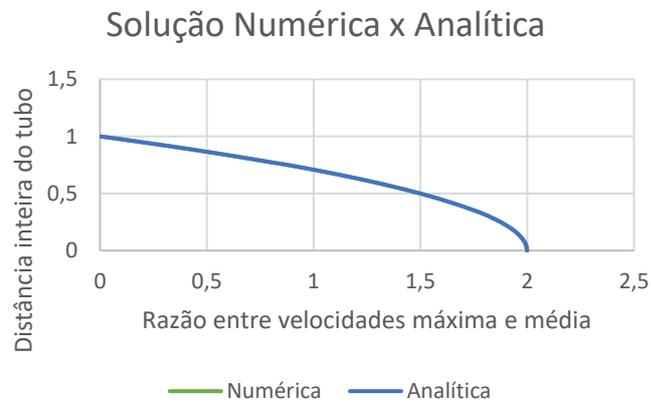
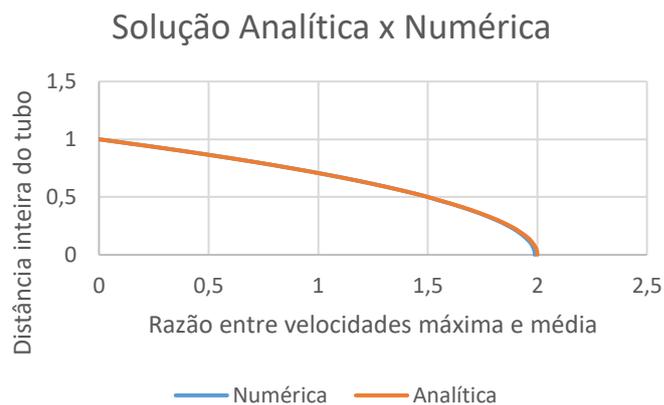
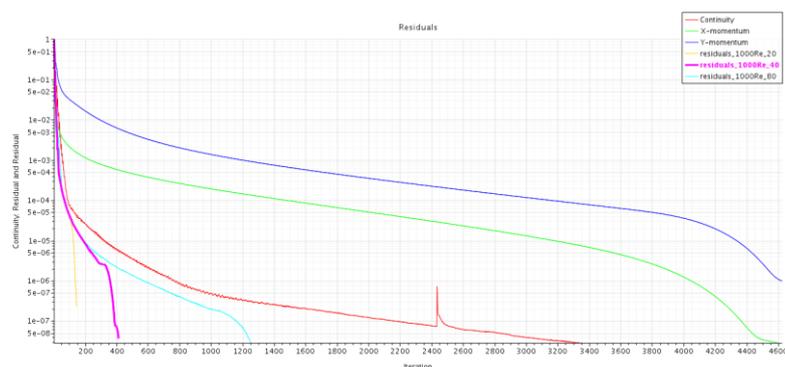


Figura 4 – Comparação das velocidades – Reynolds 1000



Quando observamos os erros residuais para cada número de Reynolds, verificamos que há uma divisão radial ideal para que ocorram todas as análises necessárias. É possível ver, da figura (5) que a melhor divisão radial é a de 40 unidades por área. Na tabela (1) observamos a relação de cada número de Reynolds com a velocidade de cada escoamento. Quanto menor o número de Reynolds, menores serão as velocidades.

Figura 5 - Exemplo comparação de erros residuais



Fonte: STAR-CCM+ 2019.2

Na figura (5) ainda é possível perceber que para a divisão radial de 40, quando comparamos com outras divisões radiais maiores, mais detalhadas, os erros residuais são praticamente os mesmos, indicando que, por mais que as outras malhas possuam mais detalhes, maior complexidade na superfície com forte tendência de detalhamento da simulação, ainda assim é possível escolhermos divisões verticais e horizontais de malhas que se adequam de um modo muito mais simples e rápido, evitando a necessidade de se processar tantos dados de volume e área superficial. Esse cenário dos erros, para os outros números de Reynolds restantes, seguem por analogia o mesmo processo de escolha da malha, assim como a proximidade do erro para a divisão radial de 40 unidades em relação às outras divisões. A divisão das malhas pode ser visualizada no quadro (1).

Tabela 1 - Relação de velocidade e Reynolds

Número de Reynolds	Velocidade (m/s)
1000	0,01
100	0,001
10	0,0001

Fonte: O autor (2019).

Quadro 1 – Divisões de malhas uniformes

Divisão radial	Divisão horizontal
20	100
40	200
80	400
160	800

Fonte: O autor (2019).

## CONCLUSÃO

Com relação às malhas não-uniformes, foi possível observar que apresentaram algumas imprecisões, erros bem mais evidentes do que os apresentados para malhas uniformes. É possível concluir que mesmo buscando um maior refinamento nas paredes do tubo, com as malhas não-uniformes, as malhas uniformes apresentaram maior precisão e resultados mais seguros em determinar o regime do fluido.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha família por me apoiarem nos estudos, entenderem minhas ausências do ambiente familiar quando há necessidade em função dos estudos, ao CNPq por proporcionar boas oportunidades de pesquisa, à toda equipe de simulação do CERNN, em especial Alan Lugarini e Vinicius Daroz.

## REFERÊNCIAS

- FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos 8ª Ed.** [S.l.]:, p. 426–430, LTC, 2010.
- MUNSON, Bruce R. *et al.* **Fundamentals of Fluid Mechanics 7th ed.** [S. l.]:, p. 326-329, Wiley, 2013. *E-book*.
- HIRSCH, Charles. **Numerical Computation of Internal & External Flow 2nd ed.** [S. l.]:, p. 1-9, Elsevier, 2007. *E-book*.