

Método de decomposição LU baseado no algoritmo de Sadoski

Lu decomposition method based on Sadoski's algorithm

RESUMO

A pesquisa desenvolvida buscou formular um novo método de decomposição LU baseado no algoritmo de Sadoski e auxiliar os estudantes de engenharia, a partir da construção de interfaces gráficas, quanto aos diferentes métodos (decomposições, métodos de resolução de sistemas lineares, etc.) que podem ser aplicados às matrizes. A decomposição LU, que surge naturalmente da eliminação gaussiana, mostrar-se-á também presente a partir do algoritmo de Sadoski. No método desenvolvido serão obtidos, de maneira simétrica, dois conjuntos de matrizes LU e uma decomposição LDU. Para além da formulação do método, foram comparados aspectos operacionais entre o método proposto e o de Doolittle; este já consolidado na literatura especializada.

PALAVRAS-CHAVE: Decomposição LU. Sadoski. Interfaces educacionais.

Vinícius Guimarães de Oliveira
viniciusguimadoliveira@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil.
Wellington José Corrêa
wjcorrea@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil.
Fernando César Gonçalves Manso
fmanso@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil.

Recebido: 19 ago. 2019.

Aprovado: 01 out. 2019.

Direito autorial: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



ABSTRACT

The research developed sought to formulate a new LU decomposition method based on the Sadoski's algorithm and help the engineering students regarding the different methods that can be applied to the matrices (decompositions, linear systems resolution methods, etc.) by the construction of graphical interfaces. The LU decomposition, which comes naturally from gaussian elimination, will also be present from the sadoski's algorithm. Will be symmetrically obtained by the developed method two sets of LU matrices and one LDU decomposition. Were compared a lot of operational aspects between the proposed method and Doolittle's one that is already consolidated in the specialized literature.

KEYWORDS: LU decomposition. Sadoski. Educational interfaces.

INTRODUÇÃO

A decomposição de uma matriz é um tópico clássico e interessante do cálculo matricial que se tem revelado útil, especialmente sob o ponto de vista computacional, como por exemplo, na resolução de sistemas lineares de grande escala e cálculo de determinante. Este trabalho propõe o desenvolvimento de um novo método de decomposição LU baseado no algoritmo de Sadoski. Foram também desenvolvidas interfaces gráficas a fim de auxiliar os alunos das engenharias com o aprendizado das matrizes, que é de fundamental importância por conta das inúmeras aplicações em problemas reais.

MATERIAL E MÉTODOS

A pesquisa seguiu duas linhas distintas, mas complementares: uma educacional e outra operacional. No que concerne a questão educacional,

preocupou-se em apresentar de maneira amigável ao usuário as inúmeras operações que podem ser realizadas com as matrizes. Segundo (LIMA; SILVA; COSTA, 2016), o ensino a partir das interfaces gráficas se dá de maneira simples e progressiva. As construções feitas a partir da utilização dessa ferramenta foram duas: uma contendo as operações mais básicas – tais como soma, subtração e multiplicação - e outra com operações e métodos mais complexos (decomposições, resolução de sistemas lineares, etc.). No âmbito operacional, a pesquisa se voltou ao desenvolvimento de um método de decomposição LU baseado no algoritmo de Sadoski e a sua comparação computacional/operacional com o já consolidado método de Doolittle, que pode ser encontrado em (ARENALES; DAREZZO, 2015, p. 32).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

No quesito educacional, conforme dito anteriormente, buscou-se apresentar de maneira amigável e intuitiva para os alunos das engenharias os principais métodos e operações que podem ser realizados com as matrizes.

Figura 1 – Cálculo de autovalores e autovetores associados a uma matriz.

Sistemas Lineares			
Sistemas Lineares Tridiagonais			
Decomposição LU			
Decomposição QR			
Autovalores e Autovetores			
Ordem da matriz	3 <input type="button" value="OK"/>		
1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	
<input type="button" value="Solucionar"/>			
Autovalores			
16.116844	-1.116844	-0.000000	
Autovetores			
-0.231971	-0.785830	0.408248	
-0.525322	-0.086751	-0.816497	
-0.818673	0.612328	0.408248	

Fonte: Autor.

O novo método de decomposição LU desenvolvido se baseia no algoritmo de Sadoski, que se utiliza do cálculo de determinantes de ordem segunda ao invés das operações elementares (BOLDRINI, 1980, p. 35) entre as linhas da matriz, o que torna o processo mais didático.

O algoritmo de Sadoski para o cálculo de determinantes pode ser descrito da seguinte maneira: seja $C^{(n)} = A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz de ordem n . Para o cálculo do seu determinante é necessário definir outras $n - 1$ matrizes. Dado $t \in \mathbb{N}$, com $1 \leq t \leq n - 1$, a t -ésima matriz definida será representada por:

$$C^{(t)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(t)} & \dots & \alpha_{1t}^{(t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{t1}^{(t)} & \dots & \alpha_{tt}^{(t)} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Onde $\alpha_{ij}^{(t)}$ é definido da seguinte maneira:

$$\alpha_{ij}^{(t)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{(t+1)} & \alpha_{12}^{(t+1)} \\ \alpha_{21}^{(t+1)} & \alpha_{22}^{(t+1)} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Com $1 \leq i \leq t$ e $1 \leq j \leq t$.

Definidas as matrizes, o determinante da matriz A é dado por:

$$\det(A) = \frac{(-1)^l c_{11}^{(1)}}{\prod_{k=3}^n [c_{11}^{(k)}]^{k-2}} \quad (3)$$

Onde l é o número de alterações entre filas (linhas ou colunas), a fim de que se tenha $c_{11}^{(k)} \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$, com $3 \leq k \leq n$.

O método de decomposição LU desenvolvido prevê dois conjuntos de matrizes LU, que serão aqui representadas por $L^{(1)}U^{(1)}$ para o primeiro conjunto e $L^{(2)}U^{(2)}$ para o segundo. Além disso, ao final, obter-se-á também uma decomposição LDU.

Primeiro conjunto: seja $C^{(n)} = A = (a_{ij})_{n \times n}$, com $a_{11} \neq 0$, uma matriz de ordem n . De maneira idêntica ao método de Sadoski, calcula-se outras $n - 1$ matrizes, onde $\forall t \in \mathbb{N}$ com $2 \leq t \leq n - 1$ deve-se ter $c_{11}^{(t)} \neq 0$.

Definindo, primeiramente, a matriz $L^{(1)}$:

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} l_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21}^{(1)} & l_{22}^{(1)} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1}^{(1)} & l_{n2}^{(1)} & \dots & l_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Por definição, $\forall i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq n$, tem-se que $l_{ii}^{(1)} = 1$.

Para a definição dos demais elementos, percorrem-se as colunas da matriz $L^{(1)}$. Para cada coluna definem-se dois fatores α e t , onde:

$$\alpha = j - 1 \quad (5)$$

$$t = n - (j - 1) \quad (6)$$

Por fim, todos os demais elementos $l_{ij}^{(1)}$ ficam definidos da seguinte maneira:

Se $c_{(i-\alpha)1}^{(t)} = c_{(i-j+1)1}^{(n+1-j)} = 0$, então $l_{ij}^{(1)} = 0$, senão:

$$l_{ij}^{(1)} = \frac{c_{(i-\alpha)1}^{(t)}}{c_{11}^{(t)}} = \frac{c_{(i-j+1)1}^{(n+1-j)}}{c_{11}^{(n+1-j)}} \quad (7)$$

Agora, definindo a matriz $U^{(1)}$:

$$U^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{11}^{(1)} & u_{12}^{(1)} & \dots & u_{1n}^{(1)} \\ 0 & u_{22}^{(1)} & & u_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$\forall j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq j \leq n$, tem-se que $u_{1j}^{(1)} = a_{1j} = c_{1j}^{(n)}$.

Para a definição dos demais elementos, percorrem-se as linhas da matriz $U^{(1)}$. Para cada linha definem-se dois fatores α e t , onde:

$$\alpha = i - 1 \quad (9)$$

$$t = n - (i - 1) \quad (10)$$

Por fim, os demais elementos u_{ij} ficam definidos por:

Se $c_{1(j-\alpha)}^{(t)} = c_{1(j-i+1)}^{(n+1-i)} = 0$, então $u_{ij}^{(1)} = 0$, senão:

$$u_{ij}^{(1)} = \frac{c_{1(j-\alpha)}^{(t)}}{\prod_{z=n+2-i}^n c_{11}^{(z)}} = \frac{c_{1(j-i+1)}^{(n+1-i)}}{\prod_{z=n+2-i}^n c_{11}^{(z)}} \quad (11)$$

Segundo conjunto: trabalhando ainda com as mesmas matrizes anteriormente definidas, obtém-se $L^{(2)}$ e $U^{(2)}$:

Primeiramente, definindo a matriz $L^{(2)}$:

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} l_{11}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21}^{(2)} & l_{22}^{(2)} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1}^{(2)} & l_{n2}^{(2)} & \dots & l_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Tem-se que $\forall i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq n$; $l_{i1}^{(2)} = a_{i1} = c_{i1}^{(n)}$.

Para a definição dos demais elementos, percorrem-se as colunas da matriz $L^{(2)}$. Para cada coluna definem-se dois fatores α e t , onde:

$$\alpha = j - 1 \quad (13)$$

$$t = n - (j - 1) \quad (14)$$

Por fim, os demais elementos $l_{ij}^{(2)}$ ficam definidos da seguinte maneira:

Se $c_{(i-\alpha)1}^{(t)} = c_{(i-j+1)1}^{(n+1-j)} = 0$, então $l_{ij}^{(2)} = 0$, senão:

$$l_{ij}^{(2)} = \frac{c_{(i-\alpha)1}^{(t)}}{\prod_{z=n+2-j}^n c_{11}^{(z)}} = \frac{c_{(i-j+1)1}^{(n+1-j)}}{\prod_{z=n+2-j}^n c_{11}^{(z)}} \quad (15)$$

Agora, definindo a matriz $U^{(2)}$:

$$U^{(2)} = \begin{pmatrix} u_{11}^{(2)} & u_{12}^{(2)} & \dots & u_{1n}^{(2)} \\ 0 & u_{22}^{(2)} & & u_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Tem-se $\forall i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq n$; $u_{ii}^{(2)} = 1$.

Para a definição dos demais elementos, percorrem-se as linhas da matriz $U^{(2)}$. Para cada linha definem-se dois fatores α e t , onde:

$$\alpha = i - 1 \quad (17)$$

$$t = n - (i - 1) \quad (18)$$

Por fim, os demais elementos $u_{ij}^{(2)}$ ficam definidos por:

Se $c_{1(j-\alpha)}^{(t)} = c_{1(j-i+1)}^{(n+1-i)} = 0$, então $u_{ij}^{(2)} = 0$, senão:

$$u_{ij}^{(2)} = \frac{c_{1(j-\alpha)}^{(t)}}{c_{11}^{(t)}} = \frac{c_{1(j-i+1)}^{(n+1-i)}}{c_{11}^{(n+1-i)}} \quad (19)$$

Observando que as diagonais principais das matrizes $L^{(1)}$ e $U^{(2)}$ são iguais – o mesmo também ocorrendo entre as diagonais principais de $U^{(1)}$ e $L^{(2)}$ –, pode-se chegar a uma decomposição LDU. Se A é singular ($\det(A) = 0$), consegue-se

apenas matriz diagonal que satisfaz $A = LDU$. Se A não é singular, isto é, ($\det(A) \neq 0$), consegue-se duas matrizes diagonais (não necessariamente distintas) que satisfazem a fatoraçoão $A = LDU$.

Assim, são duas as possibilidades para a decomposiçoão LDU:

$$A = L^{(1)}D^{(l)}U^{(2)} \quad (20)$$

Ou:

$$A = L^{(2)}D^{(u)}U^{(1)} \quad (21)$$

Se $\det(A) = 0$, então $U^{(1)}$ e $L^{(2)}$ não admitem inversas e se obtém, portanto, somente $D^{(l)}$.

Se $\det(A) \neq 0$ consegue-se, então, ambas $D^{(l)}$ e $D^{(u)}$.

As matrizes diagonais são definidas da seguinte maneira: $\forall i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq n$, temos que:

$$d_{ii}^{(l)} = u_{ii}^{(1)} = l_{ii}^{(2)} \quad (22)$$

$$d_{ii}^{(u)} = \frac{1}{u_{ii}^{(1)}} = \frac{1}{l_{ii}^{(2)}} \quad (23)$$

Para matrizes singulares, evidentemente, define-se apenas (22).

CONCLUSÃO

Comparar-se-á o conjunto primeiro da decomposiçoão LU desenvolvida e o método de Doolittle, encontrado em (ARENALES; DAREZZO, 2015, p. 32):

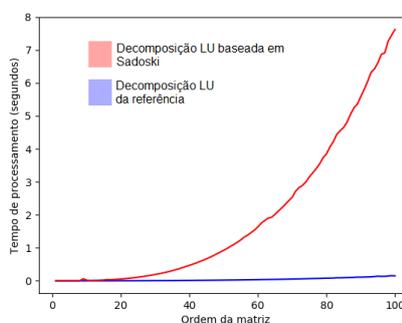
Temos que $\forall i, j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i, j \leq n$ e $i \leq j$:

$$l_{ij} = \frac{(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj})}{u_{jj}} \quad (24)$$

E $\forall i, j \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i, j \leq n$ e $i > j$:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \quad (25)$$

Figura 2 – Gráfico tempo de processamento x ordem da matriz para os métodos de decomposiçoão LU.



Fonte: Autor.

O grande poder do método não se mostra no seu desempenho computacional, mas sim na sua força didática, na sua completude e em sua

independência operacional. A força didática reside no fato da decomposição desenvolvida ser baseada no cálculo de determinantes de ordem segunda e pela ordenação das operações em linhas e colunas, o que facilita a assimilação, visto que a obtenção das matrizes é simétrica. Já a completude surge do fato de serem obtidos dois conjuntos LU e uma decomposição LDU. Além disso, quanto à independência operacional, todas as matrizes (e as operações realizadas para obtê-las) que o método prevê são obtidas independentemente, não exigindo uma ordem a ser seguida para o correto funcionamento do mesmo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao CNPQ pela concessão da bolsa para a realização do projeto. Agradeço aos meus orientadores Wellington José Corrêa e Fernando César Gonçalves Manso e ao amigo Gabriel Pastori Figueira. O auxílio de todos foi fundamental. Por fim, agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná por sua excelente estrutura.

REFERÊNCIAS

ARENALES, Selma; Darezzo, Artur. Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software, 2ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

BOLDRINI, José Luís. Álgebra Linear. 3ª edição. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

LIMA, Jenyfer de Oliveira; SILVA, Luciano de Melo; COSTA, Williane Ferreira. O uso de recursos computacionais com GUI e AUI no ensino. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6799_3103_ID.pdf >. Acesso em 18 ago. 2019.