

## Algumas considerações a respeito das formas indeterminadas do Cálculo no Ensino Básico

## Some considerations regarding the indeterminate forms of Calculus in Basic Education

### RESUMO

Ao estudar matemática é frequente se deparar com restrições para usar um algoritmo ou procedimento, despertando a curiosidade nos alunos. Algumas vezes os professores não explicam seja porque a matemática necessária é avançada, não haver tempo para justificar ou, ainda, creem que os alunos aceitem sem questionamento. Por exemplo, porque não se pode dividir por zero, particularmente zero por ele mesmo, ou, zero elevado à potência nula. Particularmente, essas situações fazem parte de um tópico estudado no ensino superior, mas que aparecem na educação básica quando se apresentam os conteúdos de divisão e potenciação. Assim, este trabalho toma como objetivo desenvolver justificativas/demonstrações para servirem de material de apoio para que os docentes possam responder as dúvidas de seus alunos a respeito disso. Para tanto, foram consultados documentos oficiais como os PCNs, BNCC e DCE, revisão bibliográfica do tema, análise de cinco livros didáticos e estudo de tópicos de teoria dos números e análise. Permitindo elaborar demonstrações para as várias etapas de ensino em que aparecem os tópicos de divisão e potenciação. Criando material base para os professores desenvolverem suas próprias justificativas quando forem apresentar aos alunos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Livros Didáticos. Divisão. Ensino Fundamental. Ensino Médio.

### ABSTRACT

When studying mathematics it is often to come across restrictions to use an algorithm or procedure, arousing curiosity in students. Sometimes teachers do not explain either because the necessary mathematics is advanced, there is no time to justify or even Believe that students accept without questioning. For example, because it cannot divide by zero, particularly zero by itself, or, zero raised to null power. In particular, these situations are part of a topic studied in higher education, but which appear in basic education when the contents of division and potentiation. Thus, this work aims to develop justifications/demonstrations to serve as support material so that teachers can answer their students doubts about it. For this purpose, we consulted official documents such as PCNs, BNCC and DCE, bibliographic review of the theme, analysis of five textbooks and study of topics of Number theory and analysis. Allowing to elaborate demonstrations for the various stages of teaching in which the topics of division and potentiation appear. Creating base material for teachers to develop their own justifications when they are presented to students.

**KEYWORDS:** Textbooks. Division. Middle School. High School.

**Luiz Gabriel Martins**  
[luizgabrielmartins2014@hotmail.com](mailto:luizgabrielmartins2014@hotmail.com)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil.

**Araceli Ciotti de Marins**  
[araceli@utfpr.edu.br](mailto:araceli@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil.

**Anderson Alves Miguel**  
[anderson.alves.miguel123@hotmail.com](mailto:anderson.alves.miguel123@hotmail.com)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil.

**Rodrigo Matheus Ritter**  
[ritter.rodrigo4@gmail.com](mailto:ritter.rodrigo4@gmail.com)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil.

**Recebido:** 19 ago. 2019.

**Aprovado:** 01 out. 2019.

**Direito autoral:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

Desde as séries iniciais, ao estudar matemática, é comum se deparar com regras que determinam a validade de um algoritmo ou procedimento, e estas são conhecidas como restrições, causando curiosidade nos alunos. Por vezes, a omissão da razão por trás está ligada ao fato que a matemática que justifica é distante da estudada no ensino básico ou então, os docente acreditam que não será questionado, como é o que acontece com a divisão por zero ou zero elevado a potência nula.

Esses dois exemplos fazem parte de um conjunto de expressões ditas indeterminadas. Lima (2012, p. 211) as concebe como desprovidas de sentido aritmético, isto é, não possuem valor preciso. Ainda que seja objeto de estudo no ensino superior no tópico de limites, acabam por aparecer na educação básica quando se estudam os conteúdos de divisão e potenciação. Justificar a indeterminação desse valor é uma tarefa árdua, pois devem fazer isso sem fazer menção aos limites (DESANTI, 2017, p.16).

Nesse sentido, o presente trabalho propõe apresentar algumas ideias de justificativas e demonstrações que explicam as restrições, servindo como material de apoio ao docente. Para tanto, foi necessário estudar os documentos que referenciam a Educação Básica e analisar livros didáticos, realizar uma revisão bibliográfica e estudar tópicos ligados a Teoria dos Números e Análise.

## MATERIAL E MÉTODOS

Para o desenvolvimento deste artigo foi necessário estudar os documentos oficiais que regem a educação básica, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), Base Nacional Curricular Comum e as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE) procurando justificativas para a realização do trabalho, como também observar as competências, habilidades e objetivos pré-estabelecidos para os conteúdos de divisão e potenciação.

Na sequência foi realizada uma análise de cinco livros didáticos: Milani, Imenes e Lellis (2009); Andrini e Vasconcellos (2015); Dante (2016); Ribeiro (2012); Souza e Garcia (2016). Buscou-se observar se era feita menção das expressões indeterminadas, nos capítulos que discutiam a divisão e potenciação, e se explicavam porque são assim chamadas. Dessa forma, se fossem encontradas explicações, elas então seriam analisadas quanto à coerência e consistência e caso fossem consideradas superficiais ou rasas, seriam reelaboradas de modo a serem mais convincentes, caso contrário, seriam criadas justificativas e/ou apontamentos que explicassem esse fato.

Concomitantemente, realizou-se uma revisão bibliográfica do tema na plataforma de dissertações de mestrado do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) procurando por trabalhos que contivessem nas palavras do título os termos “expressões indeterminadas”, “formas indeterminadas” ou “indeterminações” encontrando dois resultados: DESANTI (2017) e TETILA (2016), a fim de que fosse verificado o que já foi produzido do tema e quais explicações já foram sugeridas para justificar as indeterminações.

Com isso, somado ao auxílio de referências da área de análise matemática e teoria dos números, foram realizadas cinco demonstrações, sendo três referentes à divisão por zero e as outras duas a zero elevado a potência nula.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante as primeiras sessões de estudos dos documentos governamentais de educação, observou-se se os termos “indeterminado(a)” ou “indeterminação” apareciam quando os textos faziam menção aos conteúdos de divisão e potenciação e não foi encontrado nenhum resultado. Assim, foram elencados trechos que apontavam a importância de justificar/argumentar e demonstrar determinados resultados matemáticos, possibilitando sentido ao trabalho.

No PCN se comentava que na abordagem dos conteúdos matemáticos é importante que sejam considerados os múltiplos contextos que eles estão presentes, até mesmos os internos à matemática, para que seus significados possam ser assimilados pelos alunos (BRASIL, 1998, p. 23). Isto quer dizer que abordar as expressões indeterminadas com os alunos passa a ser um assunto interessante à medida que se consideram os contextos matemáticos, como, por exemplo, os absurdos lógicos que decorrem de supor que a divisão por zero é definida.

Os demais trechos que foram apontados como importantes nas sessões de estudo permitiram concluir em quais momentos seria mais interessante elaborar justificativas e quando realizar demonstrações. Para melhor organização desses excertos, elaborou-se a Tabela 1 apresentada abaixo.

Tabela 1 – Passagens dos documentos governamentais que indicam em quais momentos utilizarem apenas justificativas e quando deveriam ser feitas demonstrações.

Comentário	Ano indicado
“Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas...” (BRASIL, 1997, p. 37).	Ensino Infantil ou Ensino Fundamental (Anos Iniciais)
“Se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração.” (BRASIL, 1998, p.70).	Ensino Fundamental (Anos Finais)
“Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, (...), identificando a necessidade, (...), de uma demonstração cada vez mais formal...” (BRASIL, 2018, p. 523).	Ensino Médio

Fonte: Dos autores (2019).

Na sequência foi necessário analisar alguns livros didáticos de diversos anos letivos, para conhecer a linguagem matemática que os alunos têm contato. Para todos os livros didáticos que foram analisados sobre o mesmo procedimento: observar o(s) capítulo(s) que apresentavam os conceitos de divisão e potenciação.

No Ensino Infantil não foram encontradas situações que levem a pensar sobre a divisão por zero ou a indeterminação. Milani, Imenes e Lellis (2009), apresentam apenas algumas técnicas e significados (fração) para divisão.

Enquanto que, no Ensino Fundamental (anos finais), verificou-se que Dante (2016) e Andrini e Vasconcellos (2015) têm explicações semelhantes sobre a divisão por zero, mas que foram consideradas pouco convincentes, já que se pressupõe que se fosse possível realizar esta operação, não haveria resto e é interessante comentar que Dante (2016) no livro do sétimo ano propõe a discussão em duplas sobre isso. Quanto à potenciação de zero com base zero, Andrini e Vasconcellos (2015) apenas combinam com seus leitores de que não há significado, enquanto nos outros ela é omitida.

Por fim, no Ensino Médio é feita uma retomada das propriedades de potenciação e em nenhum dos dois livros é explicado porque da indeterminação. Destacamos que Ribeiro (2016) apresenta uma seção considerando a potência zero e um, mas não discute nada sobre a indeterminação.

Diante do que foi observado, considerou-se necessário realizar justificações/demonstrações para todos os níveis de ensino.

#### ENSINO INFANTIL OU ENSINO FUNDAMENTAL (ANOS INICIAIS)

Nesta fase ocorrem os contatos iniciais dos estudantes com a matemática e por isso, acreditamos que não cabe realizar manipulações algébricas. Sugere-se realizar uma atividade investigativa que permita concluir que não há sentido em dividir um número por zero.

Procede-se com a seguinte atividade: O professor entrega uma folha sulfite e um conjunto de tiras retangulares distintas, para que eles sejam capazes de perceber que dependendo o tamanho delas será necessária uma quantidade maior para preencher toda a folha sulfite. Os alunos, então, devem perceber que a medida que se torna próximo de zero, serão necessárias mais tiras para preencher a folha. A fim de que percebam que não existe uma convergência para um valor fixo, pelo contrário, a tendência é continuar crescendo indefinidamente e, portanto, mostrando que a divisão de um número por zero é indefinida, particularmente para o caso de zero por si mesmo.

#### ENSINO FUNDAMENTAL (ANOS FINAIS)

Neste momento os alunos aprendem a teoria de conjuntos e a construção dos números reais. Durante esse processo são ensinadas algumas das principais propriedades desses conjuntos. Por essa razão é interessante mostrar aos alunos que algumas demonstrações podem ser realizadas com auxílio de definições e propriedades que são apresentadas nos livros didáticos.

Para a expressão zero sobre zero, pensemos o seguinte fato: se por um lado a divisão de zero por um número natural resulta em zero, tudo nos leva a crer que o mesmo acontecerá para ele mesmo, daí tem-se que zero dividido por ele mesmo é zero. Por outro lado, sabemos que um número natural dividido por ele mesmo é um, ora, zero é igual a si mesmo, então zero dividido por zero deveria ser um. Mas então dessas duas igualdades, teríamos que zero é igual a um o que é um absurdo, portanto mostrando que a divisão é indeterminada pelo fato de que pudemos obter mais de um resultado.

Essa demonstração estende-se de forma análoga para zero elevado a potência nula. Basta notar que por um lado tem-se que zero elevado a um número natural é ele mesmo, nos fazendo acreditar que zero elevado a zero é ele mesmo e, por outro, que todo natural a zero é um e, por extensão, o mesmo acontece com zero, daí nos pondo no mesmo caso que antes zero igual a um novamente um absurdo, o que conclui esta demonstração.

### ENSINO MÉDIO

Nos últimos anos do ensino básico, os alunos já apresentam condições de realizar algumas demonstrações que empregam uso das manipulações algébricas. Nesse mesmo sentido, é que se retomam alguns conceitos que já lhes foram apresentado com certa formalidade para que se comprovem as indeterminações.

É preciso iniciar indicando que uma expressão como  $0^0$  pode ser reescrita em uma divisão da forma  $\frac{0}{0}$  e desse modo ao concluir a demonstração o professor consegue abranger as duas expressões indeterminadas. Na sequência o professor retoma o algoritmo da divisão Euclidiana, lembrando que o resto  $r$  que é um número inteiro deve ser maior ou igual a zero e menor que o dividendo. Para o caso da indeterminação tem-se que o número  $r$  deve ser maior ou igual a zero e, ainda, menor que o zero, o que é um absurdo, já que não há como um número inteiro ser maior, menor e igual a zero ao mesmo tempo, comprovando a indeterminação para  $\frac{0}{0}$  o que diretamente implica em  $0^0$  não ser definido também.

### CONCLUSÃO

Acredita-se que este trabalho possa contribuir como material de anteparo aos docentes que ministram aulas em diversos anos letivos na educação básica e que procuram por demonstrações sobre as formas indeterminadas. A partir desta pesquisa foi possível concluir que os documentos oficiais da Educação defendem a causa, isto é, justificam a necessidade do uso de justificativas/demonstrações e que nos livros didáticos já há algumas explicações realizadas, mas que não suficientes, enquanto que no Ensino Médio há uma ausência de justificativas.

### REFERÊNCIAS

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática**. 4. ed. São Paulo: Editora Brasil, 2015.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. Ensino de primeiro à quarta séries. Brasília: MEC/SEF, 1997.

\_\_\_\_\_. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. Ensino de quinta à oitavas séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

\_\_\_\_\_. **Base Nacional Comum Curricular.** Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretária da Educação Básica, 2018.

DANTE. **Projeto Teláris.** Matemática. 6º ano. 2. ed. São Paulo: Editora Ática, 2016.

DANTE. **Projeto Teláris.** Matemática. 7º ano. 2. ed. São Paulo: Editora Ática, 2016.

DESANTI, D. M. **Indeterminações.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **# Contato Matemática.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

LIMA, E.L. **Curso de Análise.** v.1. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

MILANI, E.; IMENES, L.M.; LELLIS, M. **Projeto Conviver – Matemática.** 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2019.

RIBEIRO, J. **Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia.** 1. ed. São Paulo: Editora Scipione, 2012.

TETILA, D. M. **O Limite no Estudo de Indefinições e Indeterminações Matemáticas.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Mato Grosso, Dourados, 2016.

### AGRADECIMENTOS

Agradecemos a UTFPR – TD pelo fornecimento dos livros didáticos para análise e á família pela paciência e suporte durante a trajetória do artigo.