Método Bouligand-Minkowski aplicado ao cálculo da dimensão fractal em redes complexas

Complex networks fractal dimension measure using Bouligand-Minkowski method

Luiz Alberto Pereira de Sá
luizs.2015@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, Paraná, Brasil

Dalcimar Casanova
dalcimar@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, Paraná, Brasil

RESUMO

As redes complexas podem ser utilizadas para representar as características topológicas de diversos sistemas. A caracterização é um aspecto importante no estudo das redes e pode ser realizada utilizando diversas medidas, dentre elas, a dimensão fractal. Diversos métodos podem ser empregados para estimar esta medida em rede. Um dos métodos conhecidos por apresentar resultados mais acurados é o método de Bouligand-Minkowski. Entretanto, de acordo com as pesquisas realizadas, não foi encontrado equivalente deste método para rede. Neste trabalho, será proposto uma possível forma de adaptá-lo para rede. Serão apresentadas comparações entre o funcionamento de outros métodos em imagens e redes, bem como comparações entre o funcionamento do método proposto para redes e o seu funcionamento em imagens. Observa-se uma certa semelhança. O método proposto apresentou bons resultados preliminares.

PALAVRAS-CHAVE: Redes Complexas. Dimensão Fractal. Bouligand-Minkowski.

Recebido: 19 ago. 2019.
Aprovado: 01 out. 2019.

ABSTRACT

Complex networks can be used to represent the topological characteristics of various systems. The characterization is an important aspect in the study of networks and can be performed using several measures, including the fractal dimension. Several methods can be employed to estimate this measurement in network. One of the methods known to give more accurate results is the Bouligand-Minkowski method. However, according to the research conducted, no equivalent of this method to network was found. In this work, a possible way of adapting it to a network will be proposed. Comparisons will be presented between the operation of other methods in images and networks, as well as comparisons between the operation of the proposed method for networks and its operation in images. There is a certain similarity. The proposed method presented good preliminary results.

KEYWORDS: Complex networks. Fractal dimension. Bouligand-Minkowski.

INTRODUÇÃO

É fácil perceber que os sistemas em formato de rede existem em diversas escalas e nas mais distintas aplicações. Dentre alguns exemplos, tem-se a internet, as redes sociais, as redes alimentares, redes de distribuição de energia e as redes de citações entre artigos (NEWMAN, 2003; BACKES; CASANOVA; BRUNO, 2007). Para Cohen e Havlin (2010), uma rede constitui-se de um conjunto de vértices (ou nós) que são conectados por um conjunto de arestas. Percebe-se, que este é um conceito simples e por isso diferentes sistemas complexos podem ser analisados usando as mesmas ferramentas e métodos matemáticos.

No estudo das redes, é importante a caracterização da sua estrutura. Diversas medidas podem ser extraídas das redes para esse fim, dentre elas, a dimensão fractal (COSTA et al., 2007). A dimensão fractal (D) é uma das características mais importante de um fractal. É uma medida capaz de representar o nível de ocupação do espaço euclidiano por um objeto fractal e o quão irregular é esse objeto. Para isso, utiliza-se um valor fracionário (BACKES, 2006; BACKES et al., 2008).

Assim, por representar o nível de ocupação, essa é uma importante medida, pois um nível maior de ocupação do espaço implica em uma estrutura fractal mais complexa. A relação entre nível de ocupação de espaço e complexidade faz com que a dimensão fractal possa ser utilizada como ferramenta de análise de formas (BACKES, 2006; BACKES et al., 2008). Por exemplo, medidas fractais podem ser extraídas em aplicações como a análise de textura (FLORINDO; CASANOVA; BRUNO, 2013).

No entanto, apesar de diversas formas encontradas na natureza apresentarem características próximas a de um fractal, fractais são objetos exclusivamente teóricos, ou seja, inexistem no mundo físico. Para objetos não fractais a dimensão fractal atua como uma medida do nível de complexidade do objeto (BACKES, 2006). Na literatura, encontra-se diversos métodos para estimar a dimensão fractal de um objeto, incluindo o Box Counting, Massa Raio e o método de Bouligand-Minkowski que será utilizado na realização deste trabalho.

O método de Bouligand-Minkowski ou dimensão de Minkowski é conhecido por ser um dos métodos que geram os valores mais precisos e consistentes para a dimensão fractal (TRICOT, 1995). Trata-se de um método mais sensível a mudanças estruturais da forma em análise. Os resultados consistentes justificam-se por não haver necessidade de ajustes iniciais, coisa que não acontece nos métodos citados anteriormente (BACKES, 2006).

Neste método, um objeto A é dilatado por um disco de raio r, criando uma área de influência A(r). A área de influência A(r) é muito sensível a alterações da estrutura do objeto por isso, mesmo pequenas alterações podem ser detectadas (TRICOT, 1995). A dimensão fractal de Bouligand-Minkowski, D é definida, de forma geral, como (BACKES et al., 2008):

$$D = N - \lim_{r \to 0} \frac{(A(r))}{\ln r} \quad (1)$$

$$A(r) = |\{x \in R^N | \exists y \in A : |x-y| \geq r\}| \quad (2)$$

Com N representando a dimensão do espaço euclidiano em que a forma está inserida.

A princípio, pelas pesquisas realizadas não foi possível encontrar um equivalente do método Bouligand-Minkowski em redes complexas. É justamente neste ponto que este trabalho está inserido. Desta forma, este trabalho tem como objetivos identificar estratégias para aplicar o método de Bouligand-Minkowski em redes complexas, investigar a influência de parâmetros como volume dilatado a cada iteração e comparar o resultado do método proposto com outros métodos. Na próxima seção será descrito como este problema foi abordado.

MATERIAIS E MÉTODOS

Foi realizado um levantamento bibliográfico em busca dos principais métodos utilizados no cálculo da dimensão fractal. Observou-se como estes métodos foram implementados em imagens e como eles foram implementados em redes complexas. Com isso, foi possível observar uma certa semelhança entre as duas aplicações. Como será descrito nos próximos parágrafos, o método proposto também tem algumas semelhanças em relação o método de Bouligand-Minkowski aplicado em imagens.

Para melhor entender o funcionamento do método proposto, pode-se utilizar a seguinte analogia: as arestas podem ser imaginadas como canos com um certo volume definido pelo peso das arestas. Caso o grafo seja não ponderado, o valor deste volume é definido como 1. Cada vértice pode ser visto como entradas para as arestas. E o processo de dilatação pode ser imaginado como a inserção de fluido nas arestas por meio dos vértice. Esse fluido é dividido entre todas as arestas adjacentes a um dado vértice.

Por isso, quando um dado vértice for dilatado, o volume de influência deste vértice vai ser armazenado nas arestas conectadas a ele. Em imagem, a cada iteração o raio r é incrementado em certa quantidade. No método proposto será utilizado um valor $v_{incremento}$, que será acrescido a cada iteração. Este valor pode ser definido de diversas formas, dentre elas, em função de outras medidas encontradas extraída das redes como grau médio, força, etc. Neste trabalho, $v_{incremento}$ foi definido como uma porcentagem do grau médio da rede k_m. Essa escolha se justifica por ter apresentado os melhores resultados.

O volume acrescido a cada iteração é dividido entre todas as arestas de um vértice i, ou seja, em cada aresta de um determinado vértice é inserido um volume $v_{incremento}/k(i)$, com k(i) representando o grau do vértice. Caso em uma determinada aresta caiba menos do que a quantidade $v_{incremento}/k(i)$, é colocado apenas o volume necessário e a sobra é descartada. Caso a aresta já esteja cheia, o volume $v_{incremento}/k(i)$ é descartado. Algo semelhante também acontece em imagens quando um pixel está para ser dilatado e alguns dos seus vizinhos já foi definido, uma vez que a imagem utilizada nesse método é binária.

Quando aplicado em imagens, durante a dilatação, a ordem que um pixel é dilatado influência qual pixel é afetado por esta dilatação, uma vez que um pixel possua valor 1, outro pixel não é capaz de alterar este valor, logo ele não sofre mais influência. No método proposto acontece algo semelhante. Caso o volume inserido em uma aresta por um vértice já seja o suficiente para preenchê-la, nenhum outro vértice influência nessa aresta.

A ordem como cada vértice da rede será percorrido pode ser definido de diversas maneiras: em ordem alfanumérica, aleatória, por níveis de vértices em relação a um dado vértice inicial, ou de qualquer outra forma possível. No método proposto, será escolhido um vértice para ser o início da dilatação e a partir deste, será realizada uma varredura a fim de se obter uma matriz de níveis. Durante a dilatação, a cada iteração, cada vértice será percorrido na ordem definida por essa lista.

Esse processo para quando todas as arestas estão dilatadas. Durante a dilatação das arestas, é possível coletar diversos dados de interesse, como volume total despejado a cada iteração, volume médio das arestas ou dos vértices a cada iteração, volume médio que cada vértice lança em suas arestas, etc. Esses dados podem ser utilizados para estimar a dimensão fractal. No método proposto, será traçado um gráfico log-log do volume total despejado a cada iteração por $v_{incremento}$. Então, o coeficiente angular α da reta que melhor se ajusta aos pontos é calculado e $D = 3-\alpha$ é o valor de dimensão obtido pelo método proposto.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

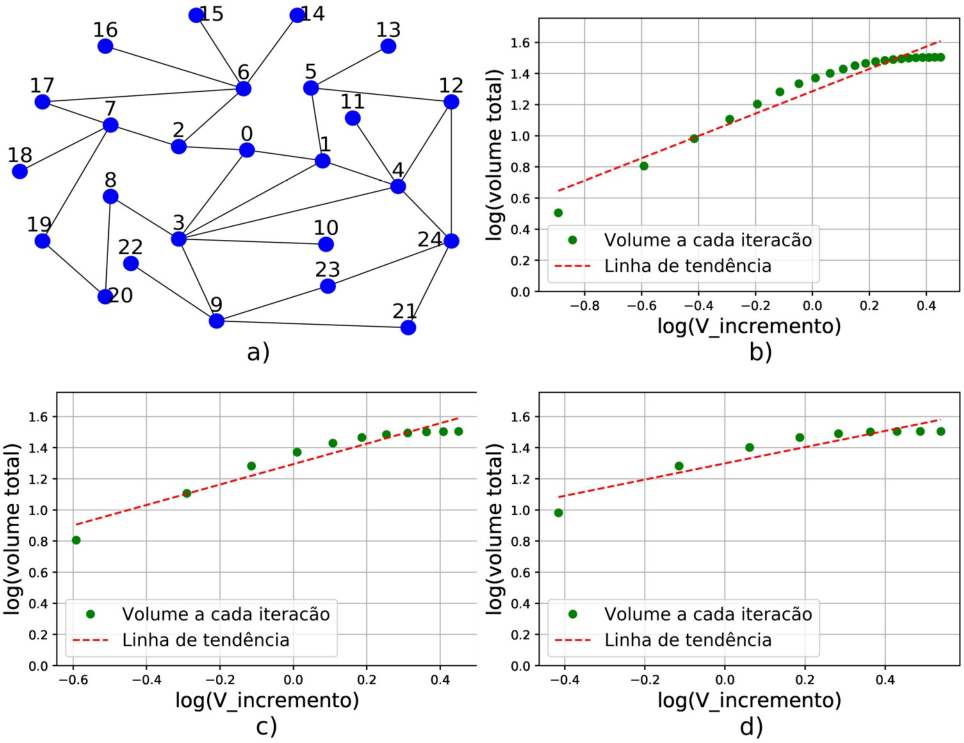
Para analisar a influência do parâmetro $v_{incremento}$, o método proposto foi executado em uma rede especifica, utilizando diversos valores para este parâmetro. Para cada valor utilizado, foi extraído o conjunto de pontos gerados pela aplicação, a reta que melhor se ajusta aos pontos, bem com dimensão obtida. Os resultados são exibidos na Figura 1.

A partir dos resultados exibidos na Figura 1 pode-se observar que o método proposto sofre influência direta do parâmetro $v_{incremento}$ utilizado, fazendo com haja diferença no valor de dimensão obtido. Durante a realização do experimento foi observado que um valor muito pequeno de $v_{incremento}$ produzia um valor de dimensão menor. Por outro lado, o uso de um valor mais alto, produzia um valor de dimensão maior. Por isso, outros estudos se fazem necessário para verificar a existência de melhores valores de $v_{incremento}$. E ainda, se existe uma forma melhor de definir o parâmetro $v_{incremento}$.

Visando comparar o método proposto com outro método, foi implementado o método massa raio, descrito por Newman e Watts (1999). Essa escolha se justifica pois esse método é de fácil implementação. Além disso o autor afirma que esse método apresenta bons resultados. Para a implementação destes métodos foi utilizado a linguagem Python. Após a implementação, o método proposto foi executado para diferentes valores de $v_{incremento}$ e em diversas redes. Na sequência foram calculadas correlações entre todos valores de dimensão obtidos para cada valor de $v_{incremento}$ e o método massa raio implementado. E em seguida foi escolhido o valor de $v_{incremento}$ que apresentou a maior correlação. A Tabela 1 apresenta as redes utilizadas nos testes, os valores de dimensão obtidos pelo método massa raio, os valores de dimensão obtidos pelo método proposto e a correlação para os valores obtidos pelos dois métodos.

A partir dos resultados obtidos no experimento realizado com o método massa raio e o método proposto, pôde-se constatar que o método proposto apresenta tendência a seguir o comportamento do método massa raio, justificando a correlação obtida. Embora os resultados, exibidos na 3º coluna da Tabela 1, apresentem valores muito próximos de 3, os resultados atenderam ao propósito do trabalho proposto nesse artigo, sendo implementado por tanto, um método para o cálculo da dimensão fractal em redes complexas baseando-se no método de Bouligand-Minkowski.

Figura 1 – Curva log-log para dois valores de $v_{incremento}$, com a matriz de níveis gerada a partir do vértice 0: a) rede na qual o método proposto foi aplicado, baseado em Silva e Costa(2012), b) curva obtida para $v_{incremento} = 0{,}05 \cdot 2{,}56$ resultando em uma dimensão = 2.28, c) a curva obtida para $v_{incremento} = 0{,}1 \cdot 2{,}56$ resultando em uma dimensão D = 2,34 e d) a curva obtida para $v_{incremento} = 0{,}15 \cdot 2{,}56$ resultando em uma dimensão D = 2,47.



Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 1 – Resultados obtidos em relação ao método Massa Raio.

Rede	Dimensão Massa-Raio	Dimensão com método proposto: $v_{incremento} = 0{,}442 \cdot k_m$	Correlação
Football	2,013	2,877	
Email	2,310	2,830	
Power-US-Grid	2,068	2,867	
Soc-Dolphins	1,213	2,779	0,901
Characters	1,423	2,781	
Netscience	0,341	2,691	
Usair	2,287	2,974	
Geom	3,078	2,957	

Fonte: Autoria própria (2019).

CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo identificar uma maneira de aplicar o método de Bouligand-Minkowski no cálculo da dimensão fractal em redes complexas reais.

Por meio dos testes realizados, pôde-se observar a influência do parâmetro $v_{incremento}$. Foi observado também que a variação do parâmetro $v_{incremento}$ é responsável por variações e inconsistências na estimativa da dimensão fractal. Por meio da comparação com o método massa raio, possível obter a validação do método proposto, além disso, tornou-se possível observar o comportamento do método proposto em relação ao método massa raio, bem como a configuração mais apropriada para esse experimento. No entanto, apesar do nível de sucesso obtido nessas aplicações, se fazem necessários outros estudos relacionando a escolha do parâmetro $v_{incremento}$, de modo a suprir as deficiências que a técnica empregada possui e propor melhorias.

AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo auxílio financeiro fornecido através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

REFERÊNCIAS

BACKES, André Ricardo. **Implementação e comparação de métodos de estimativa da dimensão fractal e sua aplicação à análise e processamento de imagens.** 2006. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

BACKES, André Ricardo; CASANOVA, Dalcimar; BRUNO, Odemir Martines. Método de aproximação poligonal de contornos utilizando redes complexas. **INFOCOMP**, v. 6, n. 2, p. 71-80, 2007.

BACKES, André R. et al. Dimensao Fractal Volumétrica aplicadaa imagens urbanas de sensoriamento remoto. In: **IV Workshop de Visão Computacional**, págs. p. 196-200, Bauru, 2008.

COHEN, Reuven; HAVLIN, Shlomo. **Complex networks: structure, robustness and function**. Cambridge university press, 2010.

COSTA, L. da F. et al. Characterization of complex networks: A survey of measurements. **Advances in physics**, v. 56, n. 1, p. 167-242, 2007.

FLORINDO, Joao Batista; CASANOVA, Dalcimar; BRUNO, Odemir Martinez. Fractal measures of complex networks applied to texture analysis. In: **Journal of Physics: Conference Series**. IOP Publishing, 2013. p. 012091.

NEWMAN, Mark EJ; WATTS, Duncan J. Scaling and percolation in the small-world network model. **Physical review E**, v. 60, n. 6, p. 7332, 1999.

NEWMAN, Mark EJ. The structure and function of complex networks. **SIAM review**, v. 45, n. 2, p. 167-256, 2003.

SILVA, Filipi Nascimento; COSTA, Luciano da Fontoura. Local dimension of complex networks. **arXiv preprint arXiv:1209.2476**, 2012.

TRICOT, C. **Curves and Fractal Dimension**. New York: Springer-Verlag. 1995.