

O método de diferenças finitas aplicado na resolução de um modelo bidimensional de secagem têxtil adaptado

Finite difference method applied on the resolution of a modified bidimensional textile drying model

RESUMO

Na indústria têxtil, o processo de secagem é um dos que apresenta maior custo, de modo que um entendimento mais profundo desses modelos e de como resolvê-los numericamente tem bastante importância dentro desse segmento da engenharia. Existem diversos modelos que descrevem o processo de secagem na indústria têxtil. Esses modelos, em sua maioria, são formados por equações diferenciais parciais que decorrem dos balanços de massa, energia e dos processos de transferências de calor e de massa. Neste trabalho são apresentados o método de diferenças finitas e sua aplicação na resolução numérica de um modelo bidimensional de secagem têxtil adaptado. Além disso, a partir da implementação computacional em Scilab e validação do método, são exibidos resultados sobre convergência e estabilidade desse método numérico quando aplicado a tal modelo.

PALAVRAS-CHAVE: Método das diferenças finitas. Equações diferenciais parciais. Secagem têxtil.

Pâmela Gabrielle Crus
pamelacrus@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Juliana Castanon Xavier
julianaxavier@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Recebido: 19 ago. 2019.

Aprovado: 01 out. 2019.

Direito autorial: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



ABSTRACT

In the textile industry, the drying process is one of the most costly. Therefore, a deeper understanding of these models and how to solve them numerically is very important within this engineering segment. There are several models that describe the drying process in the textile industry. Most of these models are formed by partial differential equations that arise from transfer processes of mass, energy and heat. In this work we present the finite difference method and its application in the numerical resolution of a two dimensional adapted textile drying model. Moreover, from the computational implementation in Scilab and method validation, results about convergence and stability of this numerical method are shown when the method is applied to such model.

KEYWORDS: Finite difference method. Partial differential equations. Textile drying.

INTRODUÇÃO Página | 2

A cadeia produtiva têxtil é uma das responsáveis por produzir uma vasta gama de bens de consumo e de produção de nosso dia a dia. Sua produção necessita de uma imensa quantidade de recursos sua produção, o que em alguns casos pode causar desperdício e até mesmo escassez, em situações mais extremas. Desse modo, a modelagem matemática e simulação numérica desses processos, vem para contribuir na redução de custo e aumentar a eficiência do processo como um todo, tanto em novos projetos como na melhoria de processos já existentes. Para isso é preciso conhecer todos os parâmetros envolvidos no modelo, antes de submetê-lo a um tratamento numérico, fazendo com que seja possível manipulá-lo de maneira adequada e matematicamente correta, assegurando assim os objetivos almejados (BACARIN, 2015).

Um dos processos dessa cadeia é o processo de secagem que pode ser executado após o processo de beneficiamento têxtil primário, secundário ou terciário. Além da característica de secar o material, a secagem pode proporcionar e garantir propriedades ao material de acordo com o processo ao que ele foi exposto anteriormente. Consegue-se realizar o processo de secagem têxtil por meio de mecanismos de transferência de massa e calor, os quais são resultantes da submissão do material têxtil à uma corrente de ar aquecida. Nesse processo, o calor é propagado pelo processo de convecção o qual se inicia com a corrente de ar quente que vai até a face superior da matéria e por condução na parte interna do material (BACARIN, 2015; CANEDA, 2016; SANTOS, 2013).

Nessa perspectiva, esse trabalho tem como objetivo estudar o fenômeno do processo de secagem têxtil através de um modelo bidimensional modificado de secagem da indústria têxtil e resolvê-lo numericamente por meio do método de diferenças finitas implementado em Scilab.

METODOLOGIA

Esse trabalho foi dividido da seguinte forma: primeiramente, realizou-se uma pesquisa teórica de modo a conhecer alguns modelos de secagem presentes na indústria têxtil, e escolher dentre esses, aquele que seria adaptado para a resolução numérica; essa adaptação é necessária num primeiro momento, pois diversos componentes do modelo são provenientes de estudos experimentais e nem sempre se encontram de maneira direta na literatura. Em seguida, iniciou-se a abordagem de resolução numérica desse modelo bidimensional adaptado, começando com a definição e principais resultados do método de diferenças finitas (MDF), e criação de uma malha de pontos espacial e temporal. O MDF, baseado em expansões de série de Taylor, foi aplicado nas suas versões regressiva e centrada, transformando a resolução da EDP na resolução de sistemas lineares equivalentes. Por fim, são exibidos experimentos de validação do método numérico utilizado, assim como testes para variações de malha temporal e espacial para análise da estabilidade e convergência do método.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O problema abordado nesse trabalho é uma adaptação de um modelo de transferência de massa em meios porosos, especificamente, a transferência de umidade no tecido durante um processo de secagem em rama. O modelo original disponível em SANTOS (2013) relaciona a concentração de água no fluido suporte c_A com a quantidade de água absorvida pelo tecido, concentração de água na fase gasosa devido à evaporação e alguns coeficientes referentes a características do tecido e do líquido envolvido durante o processo de secagem.

Segundo a autora, após as imposições assumidas durante sua modelagem, pode ser obtido o seguinte modelo matemático de transferência de umidade no tecido:

$$\frac{\partial(\theta c_A)}{\partial t} + \nabla \cdot (c_A \mathbf{u}) = \nabla \cdot (D_{ef} \nabla c_A) \quad (1)$$

Nesse modelo, $c_A = c_A(x, y, t)$, com $(x, y) \in \Omega = [0, L] \times [0, L]$ e $t \in [0, T]$. Além disso, $\mathbf{u} = \vec{u}$ indica a velocidade das fases fluida e sólida; em particular, nesse modelo é apenas considerada a velocidade atuando no sentido positivo do eixo y .

A adaptação considerada nesse trabalho assume que tanto a fração de líquido no meio poroso θ , quanto a componente de velocidade $\mathbf{u} = \vec{u}$ de no sentido positivo do eixo y e o coeficiente D_{ef} de difusividade efetiva da umidade no fluido suporte são constantes e iguais a 1. Sendo assim, podemos reescrever a Eq. (1) como:

$$\frac{\partial(c_A)}{\partial t} + \frac{\partial(c_A)}{\partial y} = \Delta c_A \quad (2)$$

A Eq. (2) continua sendo avaliada no mesmo domínio espacial e temporal que a Eq. (1). Juntamente com a Eq. (2) são acrescentadas condições de contorno e inicial, representadas respectivamente por $c_A(x, y, t) = f(x, y, t)$ para $(x, y) \in \partial\Omega$, $t \geq 0$ e $c_A(x, y, 0) = g(x, y)$. Para resolver esse problema bidimensional é aplicado o método de diferenças finitas (MDF).

Conforme Marchi e Schneider (2002), a ideia principal do MDF “é aproximar através de expressões algébricas cada termo do modelo matemático de cada nó de malha”. Ou seja, é um procedimento de solução que se fundamenta na aproximação de derivadas por diferenças finitas a fim de simplificar as EDPs, tornando possível conseguir uma resposta através da resolução de um sistema de equações algébricas.

O procedimento do MDF é iniciado com a construção de uma malha geométrica, originada da discretização do domínio da função, nesse caso dado por $(x, y, t) \in [0, L] \times [0, L] \times [0, T]$. Deve-se escolher um n , m e $q \in \mathbb{N}^*$, e definir h_1 , h_2 e k dados pelas Eq. (3), Eq. (4) e Eq. (5), respectivamente:

$$h_1 = \frac{L}{n} \quad (3)$$

$$h_2 = \frac{L}{m} \quad (4)$$

$$k = \frac{T}{q} \quad \text{Página | 4} \quad (5)$$

de modo que criamos os pontos de malha (x_i, y_j, t_l) , dados por: $x_{i+1} = x_i + h_1$ com $i = 0, \dots, n-1$, $y_{j+1} = y_j + h_2$ com $j = 0, \dots, m-1$ e $t_{l+1} = t_l + k$ com $l = 0, \dots, q-1$.

A partir das expansões de Taylor em x , y e em t , obtêm-se as aproximações para as derivadas de $c_A(x, y, t)$ na Eq. (2). Dentre as diversas possibilidades de aproximações possíveis, utiliza-se a regressiva para aproximação das derivadas de primeira ordem e a centrada para aproximação das derivadas de segunda ordem, que origina a Eq. (6) a seguir. (BURDEN; FAIRES, 2013).

$$h_2^2 h_1^2 (c_{ij}^l - c_{ij}^{l-1}) + kh_2 h_1^2 (c_{ij}^l - c_{ij-1}^l) = kh_2^2 (c_{i-1j}^l - 2c_{ij}^l + c_{i+1j}^l) + kh_1^2 (c_{ij-1}^l - 2c_{ij}^l + c_{ij+1}^l) \quad (6)$$

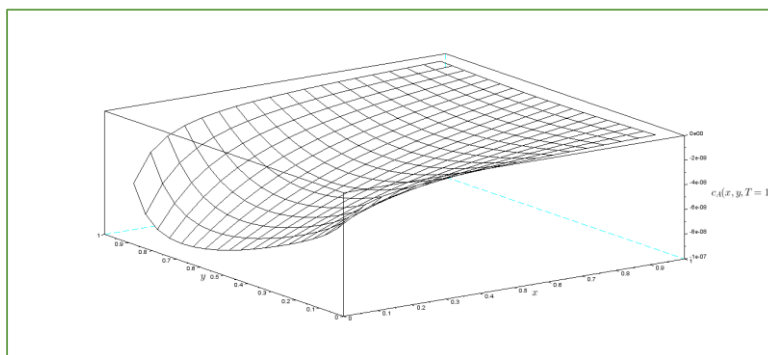
Quando $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m$ e $l = 0, \dots, q-1$ a Eq. (6) pode ser representada matricialmente pela Eq. (7).

$$AC^{(l)} = C^{(l-1)} \quad (7)$$

A matriz A na Eq. (7) é, nesse caso, uma matriz em bloco pentadiagonal. Observe ainda que, na Eq. (6) é denotado por $c_{ij}^l = c_A(x_i, y_j, t_l)$ para cada valor de i, j e l . Para a Eq. (7) não há nenhuma restrição de estabilidade (BURDEN; FAIRES, 2013).

A seguir, são exibidas algumas figuras dos resultados obtidos a partir da implementação do MDF proposto para a resolução da Eq. (2). Para a validação do algoritmo foi considerado $c_A(x, y, t) = e^{[-(x-1)^2 - (y-15)^2]} e^{-t}$ como solução exata, de modo que $f(x, y, t)$ é obtido a partir da imposição de c_A na fronteira $\partial\Omega$ e $g(x, y) = e^{[-(x-1)^2 - (y-15)^2]}$. As simulações foram feitas nesse caso considerando $L = 1$ e $T = 1$. Observe que nesse caso, a Eq. (2) não é mais homogênea.

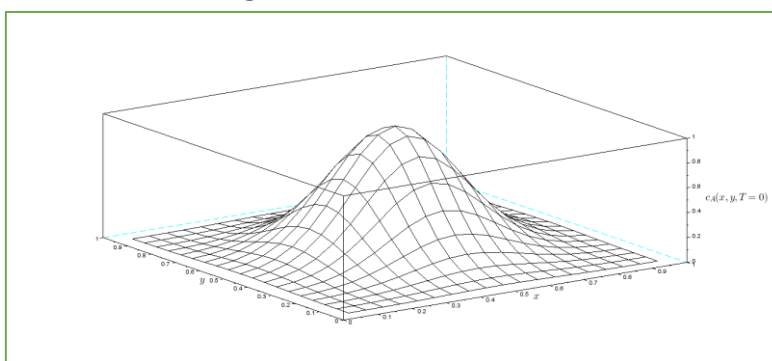
Figura 1 – Solução aproximada obtida no tempo $T = 1$.



Fonte: Autoria própria (2019).

Na Figura 1, pode-se observar o comportamento estável da solução aproximada da Eq. (2), quando considerados $h_1 = h_2 = 0,05$ e $k = 0,01$. Nesse caso, mesmo considerando uma quantidade não muito significativa de pontos na malha, mais especificamente $n = m = 20$, é possível chegar a uma resposta com precisão da ordem de 10^{-7} .

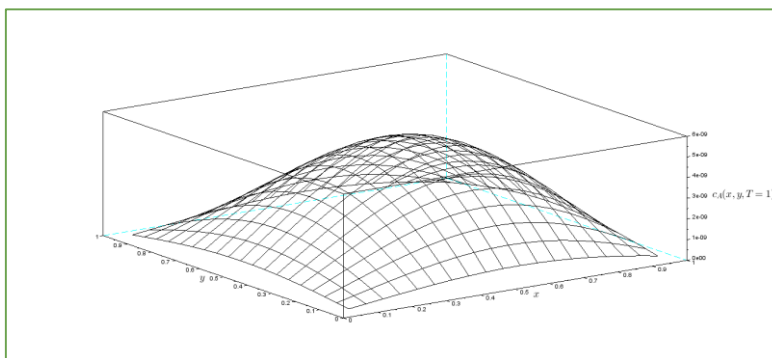
Figura 2 – Perfil do dado inicial.



Fonte: Autoria própria (2019).

Já na Figura 2, exibimos um perfil inicial de uma gaussiana $c_A(x, y, 0) = e^{-20(x-\frac{1}{2})^2 - 20(y-\frac{1}{2})^2}$. Esse pulso inicial foi utilizado como dado inicial do problema descrito pela Eq. (2), de modo que na Figura 3, pode-se observar o comportamento estável da solução aproximada nesse caso, quando considerados $h_1 = h_2 = 0,05$ e $k = 0,01$.

Figura 3 – Solução aproximada obtida no tempo T = 1.



Fonte: Autoria própria (2019).

Nesse caso em particular, não é possível estimar o erro de aproximação cometido, visto que a solução exata do problema não é conhecida. Os resultados exibidos nas Figuras 1, 2 e 3 e outros testes realizados com malhas espaciais e temporais diferentes sugerem que o MDF se comporta de maneira estável quando aplicado na resolução do modelo de secagem adaptado, podendo ser considerado uma boa alternativa de abordagem numérica desse tipo de problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a revisão bibliográfica, percebeu-se que a modelagem e solução desse tipo de fenômeno é um problema matemático complexo, devido principalmente aos inúmeros parâmetros envolvidos no processo de secagem têxtil. Isso faz com que haja um gasto de tempo excessivo durante o processo de levantamento de informações, dificultando assim a modelagem e resolução desse tipo de modelo. Por esse motivo, optou-se pela adaptação da equação original, pois o foco estava na implementação e análise dos resultados para a utilização do MDF bidimensional, que se mostrou estável nesse caso. Como um próximo passo, espera-se analisar mais profundamente o uso desse tipo de método numérico para tais modelos, principalmente em relação ao custo computacional, que é significativamente maior em relação ao mesmo método no caso unidimensional; assim como, testar esse tipo de método para modelos sem adaptações, e, portanto, mais reais.

AGRADECIMENTOS

A Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR pelo apoio financeiro através do Programa de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC 2018/2019.

REFERÊNCIAS

BACARIN, R. **Estudo de transferência de calor e massa em fibras têxteis**. 2015. 71 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Centro Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Tradução: All tasks; revisão técnica: Helena Castro. 2 . reimpr. 8. ed. Norte-americana.

CANEDA, C. M. **Secagem de materiais têxteis**. 2016. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/7872/DissCMC.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 12 ago. 2019.

MARCHI, C. H.; SCHANEIDER, F. **Introdução a mecânica computacional**. Curitiba: UFPR - Universidade Federal do Paraná, 2002. Cap. 2. p. 9-20. Disponível em: <[https://servidor.demec.utfpr.br/multigrid/Bibliografias/Material%Disciplina%MNE-733-IMC/IMC_cap_02\[1\].pdf](https://servidor.demec.utfpr.br/multigrid/Bibliografias/Material%Disciplina%MNE-733-IMC/IMC_cap_02[1].pdf)>. Acesso em: 10 ago. 2019.

SANTOS, R. M. **Estudo da secagem e do consumo de gás natural em uma rama têxtil de aquecimento direto**. 2013. 123 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.