

Implementação de um algoritmo de aceleração da convergência baseado no método Multigrid

Implementation of a convergence acceleration algorithm based on the Multigrid method

RESUMO

Devido à complexidade inerente dos problemas de escoamento de fluidos, resolver esse tipo de problema numericamente com avanço no tempo é custoso e pode se tornar inviável de acordo com a precisão desejada. Uma solução de qualidade requer o uso de malhas densas e um passo curto de avanço no tempo, culminando no encarecimento computacional. Uma alternativa para diminuir esse custo é o uso de métodos de aceleração de convergência, como o *Multigrid*, que visa avançar o erro numérico da solução usando um esquema de malhas múltiplas, no qual a solução inicia-se na malha mais fina e na sequência os valores são transferidos para as malhas mais grossas oriundas da malha fina inicial. O que se pretende com isso é a diminuição do resíduo global da solução numérica de forma acelerada. Sendo assim, o objetivo dessa proposta é a implementação do método *Multigrid* em conjunto com um método explícito de avanço no tempo.

PALAVRAS-CHAVE: Escoamento de fluidos, Aceleração de convergência, *Multigrid*.

ABSTRACT

Due to the inherent complexity of fluid flow problems, solving this type of problem numerically over time is expensive and can become unfeasible according to the desired accuracy. A quality solution requires the use of dense meshes and a short step forward, culminating in computational enhancement. An alternative to lowering this cost is the use of convergence acceleration methods, such as *Multigrid*, which aims to advance the numerical error of the solution using a multiple mesh scheme, where the solution starts at the finest mesh and afterwards values are transferred to the coarser meshes from the initial fine mesh. This is intended to decrease the overall residue of the numerical solution at an accelerated rate. Thus, the purpose of this proposal is to implement the *Multigrid* method in conjunction with an explicit method of advancing time.

KEYWORDS: Fluid flow. Convergence acceleration. *Multigrid*.

Lucas Caldeira de Oliveira
lucasoliveira.2017@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, Paraná, Brasil

Francisco Augusto Aparecido Gomes
franciscogomes@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, Paraná, Brasil

Recebido: 19 ago. 2019.

Aprovado: 01 out. 2019.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



1 INTRODUÇÃO

Simulações numéricas de problemas de escoamento de fluidos com avanço no tempo são intrinsecamente demoradas, e apenas diminuir a densidade das malhas visando uma maior velocidade de convergência pode acarretar em resultados pouco imprecisos e até mesmo em não-convergências.

Uma alternativa é o método *Multigrid*, que consiste no uso de um esquema de malhas múltiplas, na qual a solução começa pela malha mais fina e então transfere os valores para as malhas mais grossas sucessivamente de modo a diminuir o resíduo global e acelerar a convergência.

2 O MÉTODO MULTIGRID

Conforme Zheng e He (2001, p. 175), o uso de malhas finas funciona bem para a solução de problemas de escoamento de fluido mas demora para convergir, enquanto que malhas grossas convergem rápido mas perdem detalhes presentes na pequena escala do caso anterior. Ao usar um esquema de malhas, é possível unir a boa resolução das malhas finas e a velocidade de convergência das malhas grossas.

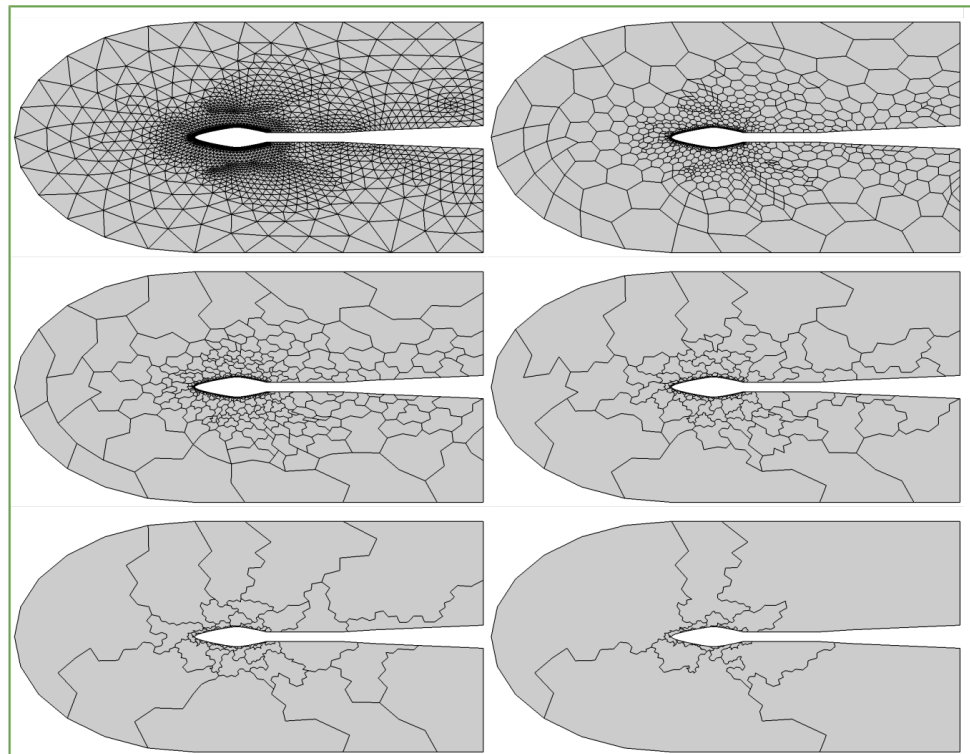
O método implementado contém quatro etapas fundamentais: aglomeração, restrição, prolongamento e avanço no tempo, sendo a primeira executada apenas uma vez, e as demais executadas várias vezes dentro de um ciclo até que se atinja a convergência da solução numérica.

2.1 ESTRATÉGIA DE AGLOMERAÇÃO PARA GERAÇÃO DE MALHAS SUCESSIVAS

Dada uma malha bidimensional que represente o problema físico a ser analisado, foi implementado um método que, através dessa malha e de um célula inicial, efetua um processo de aglomeração para gerar malhas grossas. Conforme Strauss e Azevedo (2003, p. 317), é escolhida um volume pivô (*seed*) e efetuado um agrupamento de seus vizinhos em macro-volumes, e então é escolhido um novo pivô e o processo é repetido até que todos tenham sido agrupados.

A Figura 1 apresenta uma malha inicial, composta por volumes triangulares, e as malhas grossas geradas por aglomerações sucessivas. A geometria utilizada para gerar a malha é a da nave espacial russa *Soyus*.

Figura 1 - Malha fina inicial, com 8934 volumes triangulares, e as malhas grossas provenientes de 5 aglomerações sucessivas. Geometria: nave Soyuz



Fonte: Autoria própria (2019).

2.2 OPERADORES DE RESTRIÇÃO E PROLONGAMENTO

Após ter as malhas com variados níveis de aglomeração, é preciso um processo que leve as propriedades conservadas e os resíduos da malha fina para a grossa, assim como um outro que traga esses valores de volta para a malha fina.

Define-se como Operador de Restrição o método que leva as propriedades conservadas dos volumes e seus resíduos associados de uma malha fina para a malha grossa subsequente. Para tal é feita uma média ponderada das propriedades conservadas pelos volumes de controle que compõem um determinado macro-volume. Os resíduos, entretanto, são apenas somados.

Para trazer os valores da malha grossa para a fina define-se o Operador de Prolongamento (STRAUSS; AZEVEDO, 2003, p. 317), cujo método consiste em: dado um volume da malha fina e uma propriedade conservada a ser calculada, para cada aresta de seu volume de controle efetuar a média aritmética dessa propriedade relativa aos macro-volumes que compartilham aquela aresta. Em seguida é efetuada a média aritmética dos valores calculados para cada aresta. Nessa etapa o resíduo é irrelevante e, portanto, não precisa ser calculado.

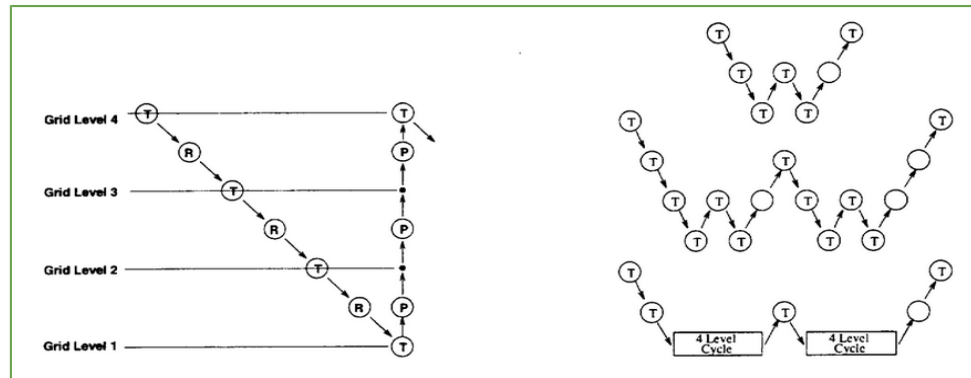
2.3 CICLOS V E W

Por fim, a execução dos operadores supracitados e do método de solução numérica ocorre através de ciclos, alternando entre o a troca de malhas e o

avanço da solução no tempo. Há duas técnicas principais para isso: o ciclo V e o ciclo W (MAVRIPLIS, p. 10).

Em ambos os ciclos o princípio é o mesmo: inicia-se na malha mais fina, denotada por *grid level 4* na Figura 2, a qual passa por um avanço no tempo, então migra-se para a próxima malha e repete-se o processo até chegar na malha mais grossa (*grid level 1*) para então voltar à mais fina.

Figura 2 - Ciclos V e W (da direita para a esquerda) e as etapas de avanço no tempo (T), restrição (R) e prolongamento (P)



Fonte: Mavriplis (1995, p. 11).

Em cada mudança de uma malha fina para uma mais grossa aplica-se o operador de restrição, que calcula os valores a serem usados no próximo avanço da solução no tempo. Já na mudança de uma malha mais grossa para uma mais fina opera o prolongamento e não há etapas de avanço da solução no tempo.

A escolha de qual ciclo implementar depende da complexidade das várias malhas a serem utilizadas no método. Enquanto o ciclo W é, de modo geral, mais eficiente e robusto que o ciclo V, para taxas de engrossamento de malha menor que 4:1 a solução pode não convergir (MAVRIPLIS, p. 11).

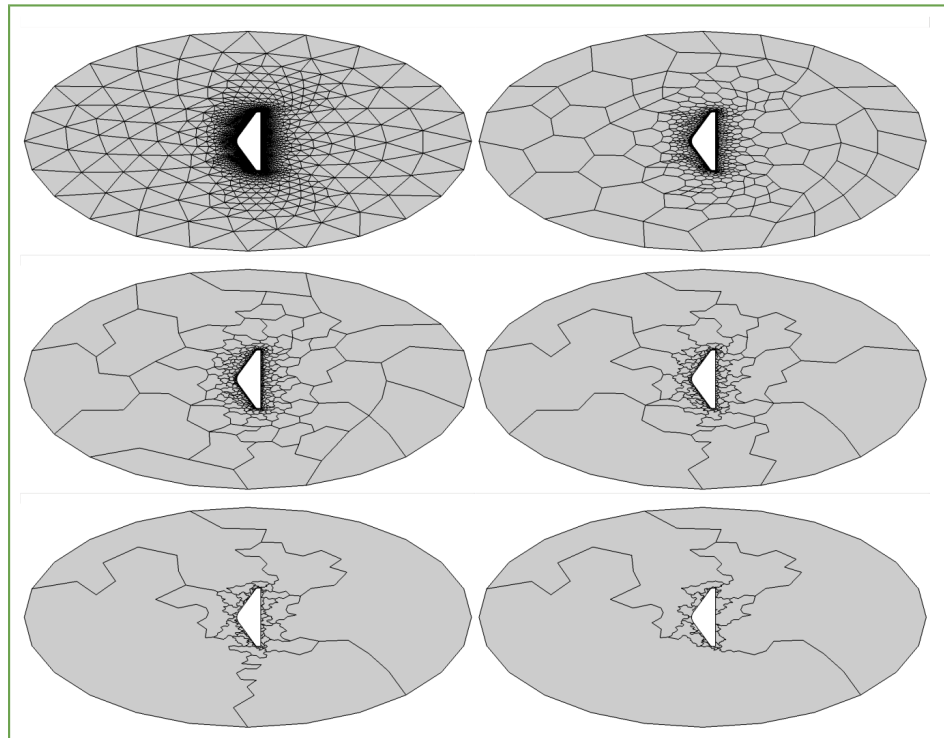
3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A estratégia de aglomeração para o método *Multigrid* discutida nas sessões anteriores foi implementada e executada com várias malhas bidimensionais não-estruturadas.

Conforme se observa na Figura 3, o algoritmo de aglomeração implementado preserva a maior densidade de células na região interior, mais crítica, assim como a mantém mais uniforme em relação à geometria dos volumes de controle.

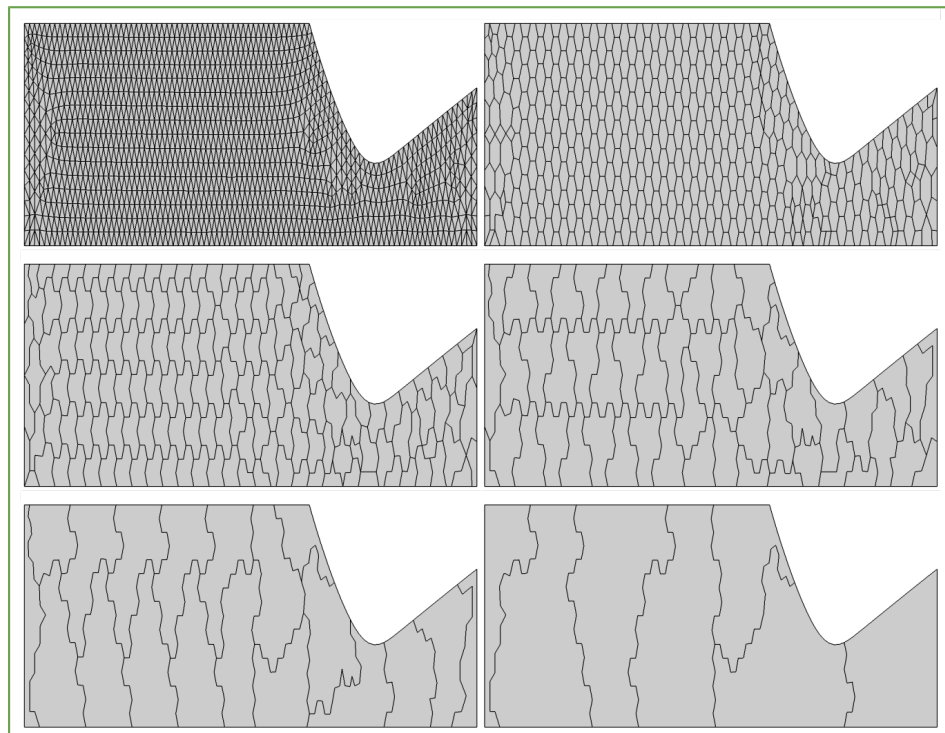
Tal uniformidade deve-se principalmente às regiões de homogeneidade da malha, mas para malhas não-estruturadas a escolha do pivô inicial é um fator determinante no resultado final da aglomeração. Na Figura 4 houve a escolha de um volume da borda interna como pivô inicial, uma vez que essa escolha implica em qual região será aglomerada primeiro.

Figura 3 - Malha fina inicial, com 11684 células triangulares, e as malhas grossas provenientes de 5 aglomerações sucessivas. Geometria: sonda Mars



Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 4 - Malha fina inicial, com 2300 células triangulares, e as malhas grossas provenientes de 5 aglomerações sucessivas. Geometria: contorno de asa



Fonte: Autoria própria (2019).

Já na Figura 4, a escolha de um volume da borda externa não influenciou muito no restante da malha, visto que ela possui uma estrutura bem homogênea. Somente nas proximidades da região curva foi observada alguma discrepância em comparação com a geometria das demais aglomerações, o que deve-se ao fato da quebra de simetria do contorno geral da malha.

As etapas seguintes à aglomeração (restrição, prolongamento e ciclos) seguem em fase de testes e correções antes que possam ser integradas ao *solver* numérico que calcula o escoamento de fluidos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Fundação Araucária pelo apoio financeiro e pelo fomento à ciência. Também agradeço ao meu orientador, Francisco Augusto Aparecido Gomes, pela oportunidade e por toda a ajuda ao longo desse projeto.

REFERÊNCIAS

MAVRIPLIS, D. J. **Multigrid techniques for unstructured meshes**. Institute for Computer Applications in Science and Engineering (ICASE), 1995. Disponível em: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19950021012.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2019.

STRAUSS, D.; AZEVEDO, J. L. F. On the development of an agglomeration Multigrid solver for turbulent flows. **J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.** Rio de Janeiro, v. 25, n. 4, p. 315-324, Dec 2003. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-58782003000400001. Acesso em: 18 ago. 2019.

ZHENG, Y.; HE, L. Multigrid upwind Euler/Navier-Stokes computation on adaptive unstructured meshes. **The Aeronautical Journal**. Cambridge University Press, p. 173-184, 2001. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/aeronautical-journal/article/multigrid-upwind-eulernavierstokes-computation-on-adaptive-unstructured-meshes/5B0273695A4051EAC32638BABF0BC0E6>. Acesso em: 19 ago. 2019.