https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2019

Estudo do Método Smoothed Particle HydroDynamics para resolver as equações de Saint Venant

Study of the Smoothed Particle HydroDynamics method to solve the equations of Saint Venant

Pedro Henrique Piantoni Boszczovski
pedro_piantoni@hotmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

Adilandri Mércio Lobeiro
alobeiro@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

RESUMO

Métodos numéricos são utilizados em grande parte para resolução de problemas e fenômenos físicos naturais complexos que não possuem solução analítica. Sua abordagem de aproximação possibilita a resolução de problemas técnicos e científicos com grande fidelidade de resultados. O método *"Smoothed Particle Hydrodynamics"* (SPH) ou Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas é um método cuja origem deriva do estudo de problemas astrofísicos com comportamento semelhante à de fluidos. Por isso, atualmente é uma ferramenta poderosa capaz de solucionar grandes problemas relacionados a dinâmica de fluidos, utilizado pela academia e em funções comerciais. O método é Lagrangeano e não depende de uma malha numérica, que é responsável pela leitura de informações a cada instante de tempo, mas sim de que pequenas partículas, discretizadas no domínio possuam suas próprias informações e as carreguem durante o tempo necessário. A base do método são as equações de *Navier-Stokes*, sua validação ocorrerá por meio da fórmula analítica do fluxo de *Poiseuille* e seu desenvolvimento objetiva a resolução das equações de *Saint Venant*.

PALAVRAS-CHAVE: SPH. Método Numérico. Navier-Stokes. Poiseuille.

ABSTRACT

Numerical methods are used largely to solve problems and complex natural physical phenomena that do not have analytical solution. Its approach to approximation enables the resolution of technical and scientific problems with high fidelity of results. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) is a method whose origin derives from the study of astrophysical problems with fluid-like behavior. Therefore, it is currently a powerful tool capable of solving major problems related to fluid dynamics, used by the academy and in commercial functions. The method is Lagrangian, and not dependent on a numerical mesh that is responsible for reading information every instant of time, but rather that small particles, discretized in the domain possess their own Information and carry them for as long as necessary. The basis of the method are the Navier-Stokes equations, its validation will occur through the analytical formula of the Poiseuille flow and its development aims at solving the equations of Saint Venant.

KEYWORDS: SPH. Numerical Method. Navier-Stokes. Poiseuille.

Recebido: 19 ago. 2019.
Aprovado: 01 out. 2019.

INTRODUÇÃO

A simulação numérica trata de traduzir aspectos físicos da realidade em equações de descrição matemáticas, que quando aplicadas à computação, são capazes de, ao invés do modo tradicional experimentalista, recriar situações virtuais e suas soluções, considerando todos os problemas e variáveis envolvidas. É uma alternativa à investigação científica através do experimentalismo real com menor custo e maior segurança, sendo uma ponte entre teorias e fenômenos reais (MONAGHAN, 1992).

Segundo Filho (2016), para que se execute de forma consistente e com o menor uso de recursos possíveis é necessário um método numérico livre de redes e não Euleriano. A simulação de fluidos em superfícies livres, móveis, com geometria complexa e deformação de topografia com precisão e qualidade se torna um problema, demandando recursos e tempo, além de ser extremamente difícil.

Com base em Liu e Liu (2003) o método Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH), ou Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas, teve sua origem em estudos astrofísicos tridimensionais de fenômenos e corpos celestes e com comportamento similar à de líquidos. O método é Lagrangiano e matematicamente a ideia é não ser dependente de uma malha numérica responsável pela leitura das informações que ocorrem em cada instante de tempo em uma simulação computacional ou cálculo, mas sim que cada partícula do fluido carregue consigo informações como: a viscosidade artificial, o calor artificial, a viscosidade física, o comprimento de suavização variável, o problema de modo de zero energia, a compressibilidade artificial, o tratamento de limites sólidos, a escolha do passo de tempo para melhorar a estabilidade no processo computacional e a precisão dos resultados. Este método resolve e facilita vários problemas numéricos, além da alta capacidade em simular deformações.

O método é utilizado em diversos problemas (SHADLOO et al., 2016). Entre alguns exemplos mais comuns acadêmicos, estão listados problemas de hidráulica e fenômenos de transportes como dissipação de calor em uma placa quadrada, tanque hidrostático, quebra de barragem, mecânica quântica, colisões de estrelas, formação e colapso de galáxias, vazamentos de fluidos e etc. Problemas já estudados por outros métodos numéricos. Há também simulações de bioengenharia como células sanguíneas, fluxo de sangue, microfluidos, válvulas do coração, aplicação de vacinas sem agulha, simulação de cirurgias entre outros campos.

O método SPH já tem décadas de existência (JIAN et al., 2016), porém sua aplicação em escala é recente devido ao aumento de capacidade computacional disponível aos pesquisadores e para aplicação industrial. Neste caso o mesmo é desenvolvido para que se possam solucionar as equações de *Saint-Venant* como objetivo final.

MATERIAL E MÉTODOS

O método SPH de forma resumida, consiste em transformar fluidos em pequenas partículas que carregam em si informações pertinentes ao problema estudado, como temperatura, velocidade, pressão, densidade entre outros aspectos. A ponderação dos valores dessas caracterizas com base em suas partículas vizinhas, a cada instante de tempo, é o que determina a continuidade do método. A solução das equações analíticas de *Poiseuille*, no problema de placas paralelas infinitas é utilizada como meio de validar os resultados apresentados pelo método numérico.

MÉTODO *SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS*

Em termos matemáticos o mesmo começa com uma equação identidade, Eq. (1) do modelo:

$$f(x)=\int_{\Omega} f(x')\delta(x-x')dx' \tag{1}$$

No qual (f) é a função do vetor posição tridimensional x, e δ(x− x') é função Delta de Dirac, dada por:

$$\delta(x-x')=\begin{cases}1 & x=x'.\\0 & x\neq x'.\end{cases} \tag{2}$$

Na Eq. (2) (Ω) é o volume da integral contendo (x). Ela implica que uma função pode ser representada pela forma integral. Substituindo a função Delta de Dirac na Eq. (1) por uma função de suavização W tem-se:

$$f(x)=\int_{\Omega} f(x')W(x-x', h)dx' \tag{3}$$

que é a equação fundamental do método. A partir desta equação formada, o método pode ser modelado conforme a necessidade do usuário.

A forma discreta ou final, que ocorre após a transformação das EDPs em EDOs, também chamada de aproximação por partículas é dada por Eq. (4):

$$f(x)=\frac{M_j}{\rho_j}f(x_j)W_{ij} \tag{4}$$

FUNÇÃO NUCLEO OU DE SUAVIZAÇÃO

Conforme explicitado na Eq. (3), a função de suavização é de extrema importância, por é ela no qual irá determinar a quantidade de partículas a serem utilizadas no processo.

Os autores Liu e Liu (2003) explicitam que ela Eq. (3) deve obedecer a três condições. A primeira relacionada ao núcleo de suavização no qual deve ser igual ao valor um, ou a chamada "condição de unidade" Eq. (5).

$$\int_{\Omega} W(x-x', h)dx' = 1. \quad (5)$$

A segunda condição é a "propriedade da função Delta" no qual Eq. (6), conforme o comprimento de suavização (h) do núcleo tende a zero ela se iguala a função Delta de Dirac (Eq.2). A função Delta de Dirac é originalmente substituída pelo núcleo em si, na função identidade (Eq.1) que dá origem à função fundamental (Eq.3).

$$\lim_{h \to 0} W(x-x', h)dx' = \delta(x-x') . \quad (6)$$

A terceira condição é "condição compacta" (Eq.7). Onde (k) é uma constante relacionada à função de suavização e que define sua área efetiva. A área efetiva é chamada de suporte de domínio.

$$W(x-x', h)dx' = 0, \quad \text{quando} \quad |x-x'|. \quad (7)$$

Há inúmeras funções núcleo disponíveis na literatura, entre elas, podemos citar como exemplo a *Spline* Quíntica Eq. (8):

$$W(r,h) = \alpha_d \left(1-\frac{q}{2}\right)^4 (2q+1) \qquad 0 \leq q < 2 \quad (8)$$

Onde $\alpha_d = \frac{3}{4h}$ em 1D, $\frac{7}{4\pi h^2}$ em 2D e $\frac{21}{16\pi h^3}$ para 3D.

EQUAÇÕES MATEMÁTICAS BASICAS SPH

Se tratando de fluidos, as equações que regem seu comportamento são descritas pelas EDPs de Navier-Stokes, usando o método SPH, tais equações possuem suas variáveis dependentes substituídas, convertendo assim as equações para EDOs. No método SPH tais equações podem ser descritas na forma (LIU; LIU, 2003):

Equação da continuidade:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^{N} m_j \, v_{ij}^{\beta} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} \quad (9)$$

Conservação de massa:

$$\frac{Dv_i^{\alpha}}{Dt} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^{2}} + \frac{+\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^{2}}\right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} \tag{10}$$

Equação da energia:

$$\frac{De_i}{Dt} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{p_i + p_j}{\rho_i^{2} + \rho_j^{2}}\right) v_{ij}^{\beta} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} + \frac{\mu_i}{2p_i} \varepsilon_i^{\alpha\beta} \varepsilon_j^{\alpha\beta} \tag{11}$$

FLUXO DE *POISEUILLE*

Conforme Sigalotti et al. (2003), o fluxo descrito por *Poiseuille* ocorre entre duas placas planas paralelas, em duas dimensões, no qual um fluido viscoso se desloca e tem sua variação de fluxo volumétrico alterada por uma variação de pressão entre uma distância determinada, Eq. (12) e Eq. (13).

$$v_x(y) = \frac{|F|}{2v}\left(Y^2 - d^2\right) = v_0\left(1 - \frac{Y^2}{d^2}\right);\ \text{onde:} \tag{12}$$

$$v_0 = -\frac{d^2}{2\rho\upsilon}\left(\frac{\Delta p}{L}\right) \tag{13}$$

EQUAÇÕES DE *SAINT-VENANT*

As equações de *Saint-Venant* originais são estudos de fluxos não permanentes em canais no qual Eq. (14) e Eq. (15) (VENANT, 1871):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (wU)}{\partial s} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial s} = \frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\rho g} \tag{15}$$

Sendo w = área transversal, U = velocidade média, ϵ = posição da superfície da água acima do nível de referência, $\frac{\chi}{\omega}\frac{F}{\rho\, g}$ = coeficiente de atrito, χ = perímetro molhado, ρ é a densidade da água, g = aceleração gravitacional, ρg = peso específico, $\rho g F$ = atrito de fronteira por unidade de área, s = comprimento ao longo do canal retangular prismático e t = tempo.

SOLUÇÃO DO MÉTODO

Autores como Souto et al. (2017) propõem soluções com códigos de grande velocidade e computação avançada na linguagem CUDA, assim como os autores Liu e Liu (2003) apresentam APIs, desenvolvidas na linguagem FORTRAN para solução.

Com as equações de Poiseuille elaboradas e a discretização completa do método SPH, busca-se agora a programação das funções do método, das funções analíticas, como meio de validação do sistema, e seu uso para resolução das equações de *Saint-Venant*.

REFERÊNCIAS

FILHO, C. A. D. F. Development of a computer code using the lagrangian smoothed particle hydrodynamics (sph) method for solution of problems in fluid dynamics and heat transfer. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia-RIPE**, v. 2, n. 27, p. 01–18, 2016. Disponível em: < http://periodicos.unb.br/index.php/ripe/article/view/14444>. Acesso em: 07 de Junho 2019.

JIAN, W. et al. Smoothed particle hydrodynamics simulations of dam-break flows around movable structures. **International Journal of Offshore and Polar Engineering, International Society of Offshore and Polar Engineers**, v. 26, n. 01, p. 33–40, 2016.

LIU, G.-R.; LIU, M. B. **Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method.** [S.l.]: World Scientific, 2003.

MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics. **Annual review of astronomy and astrophysics, Annual Reviews** 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 30, n. 1, p. 543–574, 1992.

SHADLOO, M.; OGER, G.; TOUZÉ, D. L. Smoothed particle hydrodynamics method for fluid flows, towards industrial applications: Motivations, current state, and challenges. **Computers Fluids**, v. 136, p. 11–34, 2016. ISSN 0045-7930.

SIGALOTTI, Leonardo Di G. et al. SPH simulations of time-dependent Poiseuille flow at low Reynolds numbers. **Journal of computational physics**, v. 191, n. 2, p. 622-638, 2003.

SOUTO, H. P. A.; GÓES, J. F.; GOÉS, M. L. Simulação numérica de escoamentos com superfícies livres empregando o método weakly compressible smoothed particle hydrodynamics (wcsph) e o processamento em paralelo com unidades de processamento gráfico e a api cuda. **Ciência e Natura**, Universidade Federal de Santa Maria, v. 39, n. 3, p. 569–594, 2017.

VENANT, B. de S. **Theory of unsteady water flow, with application to river floods and to propagation of tides in river channels**. Paris: Comptes Rendus, 1871.