

Método das Diferenças Finitas em coordenadas polares

Finite Difference Method in polar coordinates

RESUMO

André Chiullo dos Santos
andrechiullo@hotmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

Adilandri Mércio Lobeiro
alobeiro@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

A utilização de métodos numéricos em áreas como engenharia é necessário para cálculos extensos e inviáveis de adquirir resultados através de soluções analíticas, onde um dos métodos utilizado é o Método das Diferenças Finitas, aplicado em problemas onde a função é representada em coordenadas cartesianas. O estudo do Método das Diferenças Finitas em coordenadas polares é de grande relevância para soluções numéricas de elementos circulares, cuja solução utilizando as coordenadas cartesianas tornam-se de grande complexidade, e muitas vezes impossível devido a dificuldade em analisar a função nas proximidades de uma curva de forma numérica, possibilitando resultados aproximados e satisfatórios de qualquer problema que possua uma estrutura geométrica circular. Dessa forma, o intuito é converter um problema em coordenadas cartesianas para coordenadas polares para aplicar o Método das Diferenças Finitas.

PALAVRAS-CHAVE: Método das Diferenças Finitas. Coordenadas polares. Numérico.

Recebido: 19 ago. 2019.

Aprovado: 01 out. 2019.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



ABSTRACT

The use of numerical methods in areas such as engineering is necessary for extensive and unfeasible calculations to obtain results through analytical solutions, where one of the methods used is the Finite Differences Method, applied to problems where the function is represented in Cartesian coordinates. The study of the Finite Differences Method in polar coordinates is of great relevance for numerical solutions of circular elements, whose solution using Cartesian coordinates becomes of great complexity, and often impossible due to the difficulty in analyzing the function near a curve. numerically, allowing approximate and satisfactory results of any problem that has a circular geometric structure. Thus, the intention is to convert a problem in Cartesian coordinates to polar coordinates to apply the Finite Differences Method.

KEYWORDS: Finite Difference Method. Polar coordinates. Numeric.

INTRODUÇÃO

O Método das Diferenças Finitas (MDF) é um método numérico utilizado para solucionar equações diferenciais que possuem soluções inviáveis, seja pela extensão dos cálculos, ou pela complexidade do mesmo. Tal método consiste na discretização do domínio de uma função e na substituição das derivadas presentes numa equação diferencial por aproximação dada pela série de Taylor, como mostrado por Neide B. Franco (2006, p. 432). Habitualmente utiliza-se as coordenadas cartesianas para solucionar as equações diferenciais, no entanto, ao tratar de problemas onde a estrutura geométrica é um círculo torna-se inviável mesmo utilizando o MDF, sendo necessário o uso de coordenadas polares, dado a facilidade de abordar problemas com estruturas circulares.

O sistema de coordenadas cartesianas consiste em duas retas, uma horizontal chamada Abscissa, e outra vertical, a Ordenada, comumente chamadas de eixo X e eixo Y respectivamente. Um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ possui uma projeção no eixo das abscissas e outra no eixo das ordenadas, sendo denotado $P(x, y)$. Essas projeções fornecem a posição para determinar a localização de um ponto em qualquer local no plano. Já o sistema de coordenadas polares, o mesmo ponto P é representado pelo par ordenado (r, θ) , onde $|r|$ é a distância da origem, ou polo, até o ponto P , e θ é a medida do ângulo formado entre a reta horizontal chamada eixo polar, e o segmento de r .

Portanto para solucionar as equações diferenciais de problemas de estruturas circulares, é necessária uma conversão de coordenadas para aplicação do MDF.

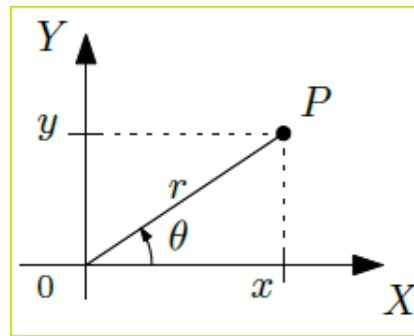
MATERIAL E MÉTODOS

Com uso da trigonometria é possível converter pontos de um plano cartesiano para um plano polar, e de acordo com Marcílio F. L. Veras (2009, p. 11), deve-se satisfazer as seguintes condições:

- a) A origem do sistema cartesiano e do polar devem coincidir em um ponto;
- b) A abscissa do sistema cartesiano deve coincidir com o eixo polar.

Através do Teorema de Pitágoras, que relaciona o quadrado da hipotenusa com a soma do quadrado dos catetos, é possível converter um ponto das coordenadas cartesianas para a coordenada polar. A Figura 1 mostra um ponto P qualquer, inscrito nas coordenadas cartesianas.

Figura 1 – Ponto P em coordenadas cartesianas



Fonte: Autoria própria (2019)

Para determinar o valor de θ , é necessário utilizar as relações de cosseno e seno mostrados na Equação (1) e (2),

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r}; \quad (1)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r}. \quad (2)$$

Pelo Teorema de Pitágoras tem-se,

$$r^2 = x^2 + y^2. \quad (3)$$

Através de algumas manipulações algébricas obtém-se o valor de r como,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

E o valor de θ como,

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}. \quad (5)$$

Com os valores de x e y é possível converter um ponto das coordenadas cartesianas para as coordenadas polares.

A Equação de Laplace em coordenadas polares é uma equação diferencial parcial definida por Pierre Simon Laplace. As soluções da Equação de Laplace em um disco são radialmente simétricas, fazendo com que o problema seja essencialmente unidimensional. Dessa forma, a equação diferencial parcial torna-se uma equação diferencial ordinária.

Utilizando a regra da cadeia e as relações entre as coordenadas cartesianas e polares tem-se,

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y). \quad (6)$$

O objetivo é apresentar a Equação (6) em coordenadas polares, e para isso é necessário expressar as derivadas presentes na equação em termos de r e θ através de derivações das relações entre as coordenadas cartesianas e coordenadas polares. Dessa forma tem-se,

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = g(r, \theta). \quad (7)$$

Para a aplicação do método das diferenças finitas é necessário realizar a discretização do domínio da função. Em coordenadas cartesianas, utiliza-se a expansão em série de Taylor para encontrar os valores das derivadas de uma

determinada $f(x)$. Dessa forma, a derivada de segunda ordem em coordenadas cartesianas pode ser escrita por diferenças centrais, dada pelas Equações (8) e (9),

$$u(x_i, y_j)_{xx} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta h)^2}, \quad (8)$$

$$u(x_i, y_j)_{yy} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta h)^2}. \quad (9)$$

Dado as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares, aplicando as devidas diferenciações para realizar a conversão de coordenadas, tem-se a derivada de segunda ordem em coordenadas polares, dada pelas Equações (10) e (11),

$$u(r_i, \theta_j)_{rr} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta r)^2}, \quad (10)$$

$$u(r_i, \theta_j)_{\theta\theta} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta \theta)^2}. \quad (11)$$

Ao substituir as Equações (10) e (11) na Equação (7), obtém-se,

$$g(r, \theta) = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta \theta)^2}. \quad (12)$$

É necessário utilizar algum software computacional para solucionar qualquer problema utilizando as equações numéricas que foram definidas para as coordenadas polares.

O Maple é um sistema de computação algébrica desenvolvido por Waterloo Maple Inc. (Ontário, Canadá), e tem uma linguagem computacional voltada para a matemática. Inserindo as equações no software ele retornará os resultados desejados. Para isso foi utilizado um problema referente a temperatura variando em um disco de raio a .

A variação da temperatura no disco é dada por Arnando de Oliveira Fortuna (2000, p. 126) como,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right). \quad (13)$$

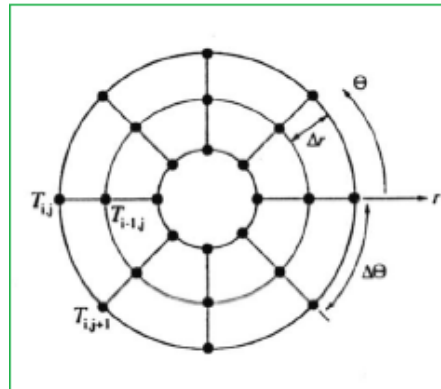
Onde α é o coeficiente de temperatura de um determinado material.

Substituindo os termos da Equação (12) dentro da Equação (13), é possível resumir a equação diferencial parcial da variação da temperatura, em uma equação de primeira ordem para utilizar o software computacional, onde a variação da temperatura depende de dois fatores:

- a) Coeficiente α ;
- b) Variação ao longo do disco, descrita pela Equação (x).

Discretizando o domínio do disco, tem-se a configuração mostrada na Figura 2.

Figura 2 – Disco discretizado



Fonte: Fortuna (2000, p. 127)

Ao aplicar a Equação (x) no software, ele irá retornar um valor diferente para cada ponto demonstrado na Figura 2, referente a variação da temperatura no disco. Multiplicando esse valor pelo coeficiente de temperatura α de um determinado material, tem-se a temperatura em qualquer ponto do disco para todo material que constitui o disco.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Abrindo o software Maple é necessário definir alguns parâmetros que vão definir a qualidade do resultado, pois quanto menor o valor entre os pontos da discretização, mais aproximado será o resultado.

Definindo a origem do círculo na origem do plano, os intervalos de r como $\frac{1}{4}$ do raio total do disco, e os intervalos de θ como $\frac{1}{2}\pi$, tem-se um disco com 12 pontos discretizados.

Assumindo um disco de raio unitário, uma temperatura nas bordas do disco de $(50\alpha)^\circ\text{C}$, encontra-se a temperatura em função de α para cada ponto, como mostra a Figura 3.

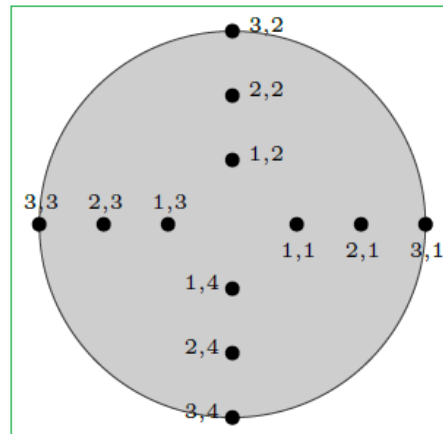
Figura 3 – Resultados do software Maple

$$\{u_{1,1} = 49.92187499, u_{1,2} = 49.92187499, u_{1,3} = 49.92187499, u_{1,4} = 49.92187499, u_{2,1} = 49.92968749, u_{2,2} = 49.92968749, u_{2,3} = 49.92968749, u_{2,4} = 49.92968749, u_{3,1} = 49.95312499, u_{3,2} = 49.95312499, u_{3,3} = 49.95312499, u_{3,4} = 49.95312499\}$$

Fonte: Autoria própria (2019)

Os valores apresentados na Figura 3 são números adimensionais, que ao serem multiplicados pelo coeficiente de temperatura, resultará na variação de temperatura pelo disco. A Figura 4 mostra visualmente os resultados adquiridos com a posição dos pontos em coordenadas polares (r, θ) .

Figura 4 – Disco discretizado em função de r e θ



Fonte: Autoria própria (2019)

Quanto maior a discretização, mais pontos serão analisados, e conseqüentemente mais aproximado será os resultados de um caso real.

CONCLUSÃO

Os resultados obtidos foram categóricos para representar o problema do disco em coordenadas polares, sendo possível a aplicação do Método das Diferenças Finitas de forma eficiente. A conversão possibilitou que o problema, antes de grande complexidade quando inserido em coordenadas cartesianas, retornasse valores satisfatórios.

Dentro das coordenadas polares, engenheiros, matemáticos, físicos, químicos e profissionais de diversas áreas do ramo ligado às exatas poderão analisar estruturas circulares com o uso do Método das Diferenças Finitas para solucionar problemas inviáveis quando inseridos nas coordenadas cartesianas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Universidade Tecnológica Federal do Paraná Campus Campo Mourão e ao Professor Doutor Adilandri Mércio Lobeiro pela oportunidade do projeto de extensão, e pelo apoio oferecido para o mesmo.

REFERÊNCIAS

FRANCO, N. B. Cálculo numérico. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FORTUNA, A. de O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

VERAS, M. F. L. **Cálculo em Coordenadas Polares**. 2009. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Especialização em Matemática na modalidade à distância) – Universidade Virtual do Estado do Maranhão, Pedreiras, 2009.