https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2019

Desenvolvimento de código computacional para análise estática de vigas utilizando elementos finitos lineares

Development of computational code for static beam analysis using linear finite elements

Eduardo Masaji Endo
endo@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil,

Adilandri Mércio Lobeiro
alobeiro@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil,

Eliton Voronovcz
elitonvoronovcz@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil,

Recebido: 19 ago. 2019.
Aprovado: 01 out. 2019.

RESUMO

O objetivo do presente estudo é o desenvolvimento de um código computacional no software MatLab, baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), para obter o deslocamento de vigas. O MEF é um método de discretização de um elemento contínuo, sendo amplamente utilizado nas mais variadas áreas da engenharia devido sua eficiência em solucionar problemas matemáticos. O código desenvolvido pode solucionar qualquer problema de deslocamento em vigas, basta indicar a posição e o tipo de vinculações da viga, além de inserir o tipo de carregamento que a estrutura está sendo submetida. A obtenção do deslocamento em vigas é necessária para o engenheiro civil, pois no momento de elaboração do projeto, o mesmo deve realizar as verificações de Estado Limite de Serviço, onde é analisado se a deflexão obtida está dentro do valor limite permitido por norma. Para validação do código computacional, comparou-se os resultados obtidos numericamente, com os resultados obtidos pela solução analítica, de modo que o erro percentual obtido foi satisfatório, comprovando a eficiência do método ao realizar a aproximação.

PALAVRAS-CHAVE: Discretização do domínio. Linha elástica. Condições de Contorno.

ABSTRACT

The objective of the present study is the development of a computational code in MatLab software, based on the Finite Element Method (FEM) to obtain the beam displacement. FEM is a continuous element discretization method, being widely used in several areas of engineering due to its efficiency in solving mathematical problems. The code developed can solve any problem of beam displacement, just indicating the position, type of beam restraint conditions, and the structural loading. Obtaining the beam displacement is necessary for the civil engineer, because in the time of project design, it is necessary to perform the limit state design checks, where it is analyzed if the deflection obtained is within the limit value allowed by the technical standard applied. To validate the computational code, the numerically obtained results were compared with the results obtained by the analytical solution, so that the percentage error obtained was satisfactory, proving the efficiency of the FEM model applied.

KEYWORDS: Domain discretization. Elastic line. Boundary conditions.

INTRODUÇÃO

As vigas são elementos estruturais onde sua função principal é suportar os esforços de flexão, cortante e torção, originárias dos carregamentos em que a mesma está submetida. Frequentemente, nas especificações de projeto de uma viga, além dos esforços, deve ser considerado o valor máximo admissível para o deslocamento (flecha) da viga, sendo normalmente obtidas por meio de uma função matemática da linha elástica que são obtidas de forma analítica (SORIANO, 2010).

Praticamente todos os fenômenos físicos podem ser descritos por expressões matemáticas, sendo estes representados por Equações Diferenciais. Um desses fenômenos é a deflexão de vigas, que pode ser descrita por uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de segunda ordem, onde a mesma é responsável por representar a deflexão causada pelo carregamento aplicado na viga e pelo peso próprio.

A solução analítica da EDO é um tanto quanto complexa, além de nem sempre ser possível sua obtenção. Diante desse problema, é interessante o uso de métodos numéricos, sendo utilizado neste estudo o Método dos Elementos Finitos (MEF) para se obter uma solução aproximada, de modo que a precisão obtida seja adequada (BURDEN, 2008).

Portanto, o objetivo deste trabalho é realizar a análise estática de uma viga por meio do MEF, considerando que a mesma esteja apoiada-engastada. Os resultados em termos de deslocamento da viga foram obtidos com auxílio de um código computacional desenvolvido na linguagem em MatLab, onde os resultados foram analisados e comparados com a solução analítica.

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

De modo geral, o MEF transforma os sistemas contínuos que contêm infinitos graus de liberdade (gdl), em sistemas discretos com um número finito de gdl. Para a resolução de problemas através do MEF, após realizar a discretização da estrutura em um número finito de elementos, obtêm-se a matriz de rigidez para cada elemento, sendo conhecida como matriz elementar, sendo possível a partir de funções polinomiais que aproximam os deslocamentos (SORIANO, 2010).

Com as matrizes elementares obtidas, efetua-se a concatenação das mesmas para composição da matriz de rigidez da estrutura, também conhecida como a matriz global da estrutura. Além disso, deve-se gerar o vetor de cargas, para então aplicar as condições de contorno, que através da resolução de sistemas lineares de equações, determina-se os deslocamentos.

No presente trabalho, a malha será constituída pelo elemento linear, com utilização da função de forma polinomial, sendo utilizado coordenadas generalizadas. Esse elemento é composto por dois nós, contendo em cada nó dois gdl, sendo uma translação no eixo y e outra a rotação em x (PETYT, 2010).

Assim, ao escrever em termos de coordenadas generalizadas, temos

$$\xi = \frac{x}{a} \tag{1}$$

Como o elemento possui quatro gdl, de acordo com Petyt (2010) escolhe-se um polinômio com quatro coeficientes. Essa função também é chamada de função de forma, sendo dada por

$$v(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\xi^2 + \alpha_4\xi^3 \tag{2}$$

Escrevendo na forma matricial temos

$$v(\xi) = \{P(\xi)\}^T \cdot \{\alpha\}$$

$$v(\xi) = \{1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3\} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Os coeficientes "α" São desconhecidos e deve-se escrever a função $v(\xi)$ em termos dos gdl, resultando em

$$v_e^T = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\};\text{ e } \alpha^T = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4\} \tag{4}$$

Substituindo v_e^T da equação (4) e sabendo que

$$\theta = \frac{dv}{dx} \tag{5}$$

Obtêm-se a seguinte forma matricial do sistema

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ a\theta_1 \\ v_2 \\ a\theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Onde na forma reduzida tem-se:

$$\{\overline{v}_e\} = [A_e] \cdot \{\alpha\} \tag{7}$$

Isolando o vetor dos coeficientes "α" resulta em

$$\{\alpha\} = [A_e]^{-1} \cdot \{\overline{v}_e\}$$

$$\{\alpha\} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ a\theta_1 \\ v_2 \\ a\theta_2 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Multiplicando a equação (8) pela matriz Identidade, tem-se

$$\{\alpha\} = [A_e^{-1}] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\alpha\} = [A_e^{-1}] \cdot [I] \cdot \{v_e\} \tag{9}$$

Ao adotar que

$$[C_e] = [A_e^{-1}] \cdot [I] \tag{10}$$

A equação (8) resulta em

$$\{\alpha\} = [C_e] \cdot \{v_e\}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & a & 2 & -a \\ -3 & -a & 3 & -a \\ 0 & -a & 0 & a \\ -1 & a & -1 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$
(11)

Substituindo (11) em (3), obtêm-se:

$$v(\xi) = \{P(\xi)\}^T \cdot [C_e] \cdot \{v_e\}$$

Desta forma, a função deslocamento está descrita em termos dos gdl, de modo que pode ser reescrita da seguinte forma

$$v(\xi) = \{N(\xi)\}^T \cdot \{v_e\}$$
(12)

Onde

$$\{N(\xi)\}^T = \{P(\xi)\}^T \cdot [C_e]$$

Ao substituir a equação (12) na equação de energia de deformação elástica, é possível obter a matriz de rigidez elementar com a seguinte equação

$$K_e = \frac{EI}{a^3} \int_{-1}^{1} N''(\xi) \cdot N''^T(\xi) \cdot d\xi \tag{13}$$

Com as matrizes elementares obtidas, deve-se realizar a concatenação de todas as matrizes elementares, resultando assim a matriz de rigidez global da estrutura [K]. Além disso, deve-se gerar o vetor com os carregamentos.

De acordo com Logan (2007), a equação matricial global que governa o MEF pode ser escrita como sendo o produto entre a matriz de rigidez global da estrutura [K] e o vetor de deslocamentos nodais {u}, que resulta no vetor de cargas {F}, deste modo

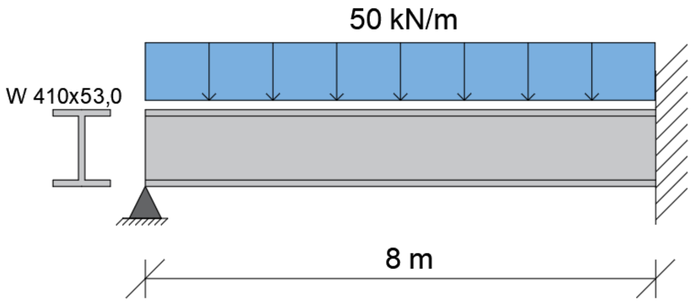
$$\{F\} = [K] \cdot \{u\}. \tag{14}$$

$$\{u\} = [K]^{-1} \cdot \{F\}$$

ANÁLISE ESTÁTICA VIA MEF

Para estudo de caso, adotou-se uma viga metálica em ASTM A36. Que possui módulo de elasticidade (E) de 200 GPa e massa específica (ρ) de 7.850 kg/m³, sendo adotado seção do tipo I laminada da série W com perfil 410x53,0 onde a mesma possui área da seção transversal de 68,4 cm² e inércia em torno do eixo horizontal da seção transversal de 18.734 cm⁴, com comprimento (L) de 8 m e carregamento distribuído (w) de 50kN/m, conforme apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Viga Apoiada-Engastada.



Fonte: Autoria própria, 2019.

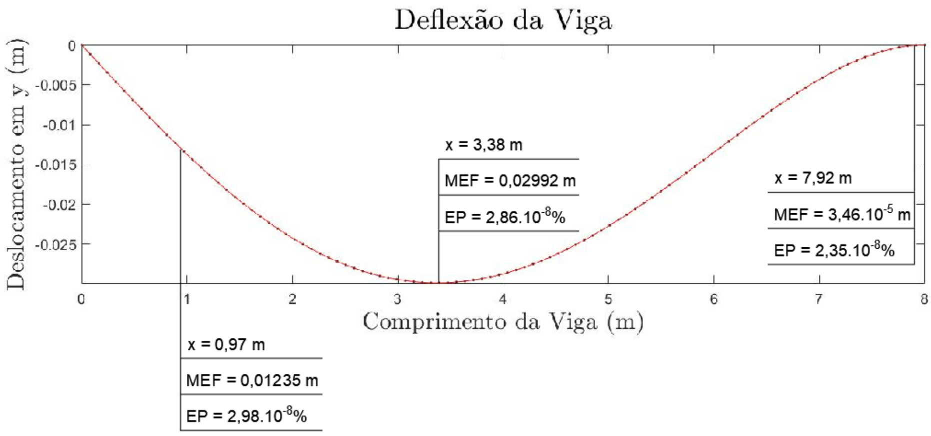
Este problema matemático, de acordo com Hibbeler (2010), possui a seguinte solução analítica:

$$y = \frac{w}{48EI}(2x^4 - 3Lx^3 + L^3x). \tag{15}$$

Por meio de um algoritmo implementado pelo autor no software MatLab 2018, discretizou-se o domínio da viga em 99 elementos, sendo utilizado funções de forma do tipo polinomial com coordenadas generalizadas.

Com a aproximação obtida por meio do MEF, obteve-se os dados apresentados na Figura 2, onde foram apresentados os resultados nos pontos onde encontram-se o menor e o maior Erro Percentual (EP) e o ponto de maior deflexão.

Figura 2 – Linha Elástica da Viga.



Fonte: Adaptado do MatLab, 2019.

Com base nos resultados, pode-se verificar a eficiência do MEF. Cabe ressaltar que quanto maior o número de repartições, menor será o erro adquirido, porém, o tempo de processamento computacional será maior.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos resultados do presente estudo, verificou-se que o Método dos Elementos Finitos é uma ferramenta poderosa para realizar análises estruturais. O código desenvolvido foi validado ao comparar com a solução analítica, pois o mesmo apresentou um erro percentual de aproximadamente $3x10^{-8}$ %.

É importante salientar que ao aumentar o número de elementos na discretização do domínio, de modo que obtenha um maior refinamento da malha, será gerado um aumento de convergência com a solução analítica, se a mesma existir, pois nem sempre a mesma é possível

No código desenvolvido, é possível simular vigas com qualquer situação de vinculação, basta alterar no código o vetor que contêm as condições de contorno de restrição dos graus de liberdade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Universidade Tecnológica Federal do Paraná-UTFPR CM pela oportunidade em ser acadêmico nessa instituição e em desenvolver o projeto de pesquisa de iniciação científica, agradeço também à Fundação Araucária pelo apoio financeiro para o desenvolvimento do estudo.

REFERÊNCIAS

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Análise numérica. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

HIBBELER, R. S; Resistência dos Materiais, 7. Ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

LOGAN, D. L. A First Course in the Finite Element Method. 4 ed. Platteville: Thomson, 2007. 808 p.

PETYT, M. Introduction to finite element vibration analysis. Southampton: Cambridge, 2010.

SORIANO, H. L. Estática das estruturas. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2010.

SORIANO, H. L. Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas Vol. 48. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2010.