

Impactos da alteração da continuidade na Partição da Unidade para a solução de um problema de vibração livre utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados

Impacts of the continuity change in the Partition of Unity for the solution of a free vibration problem using the Generalized Finite Element Method

RESUMO

O presente trabalho está inserido no estudo e determinação de frequências naturais e modos de vibração na área de dinâmica estrutural, mais especificamente envolve a determinação dos autopares de um sistema bidimensional em vibração livre. Para isto será empregado o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), que apresenta um melhor desempenho na determinação das referidas propriedades da estrutura, se comparado ao Método de Elementos Finitos (MEF) convencional, e por ser um método que permite enriquecimentos algébricos variados, sem necessariamente envolver alterações de malha. Pretende-se estudar os efeitos no processamento do problema causados pela alteração da continuidade da Partição da Unidade (PU) empregada no método. O desempenho das PU's típicas da versão suave do método (MEFG C^k) será confrontado com o apresentado pelas PU's convencionais, de classe C^0 . Será aplicado enriquecimento polinomial juntamente com refino de malha. Os resultados numéricos envolvem o erro relativo na previsão das frequências naturais, além do número de condição das matrizes envolvidas no processo e um exame da distribuição dos seus autovalores quanto à ordem de grandeza. Os resultados indicam que as funções suaves da versão C^k conduzem a um aprimoramento e maior eficácia do Método dos Elementos Finitos Generalizados.

PALAVRAS-CHAVE: Método dos Elementos Finitos Generalizados. Vibração livre. Frequências naturais.

ABSTRACT

The present work is concerned with the study and prediction of natural frequencies and vibration modes in the branch structural dynamics, more specifically it involves the computation of the eigenpairs of a two-dimensional system in free vibration. For this analysis the Generalized Finite Element Method (GFEM) will be employed due to its better performance in determining such structure's properties, compared to the conventional Finite Element Method (FEM), and as it is a method that allows different types of algebraic enrichments, without necessarily involving remeshing. It is intended to study the effects of the continuity change in the Partitions of Unity (PU's) used in the method in the problem evaluation. The performance of the usual PU's of the smooth version of the GFEM (GFEM C^k) will be confronted with that showed by the conventional C^0 counterparts. Polynomial enrichment will be applied jointly with mesh refinement. The numerical results cover the relative errors in predictions of the natural frequencies, besides the condition number of the involved global matrices and an examination of the eigenvalues distributions with relation to their magnitude orders. The results suggest that the smooth functions of C^k version leading to an improved prediction and greater effectiveness of the GFEM.

KEYWORDS: Generalized Finite Element Method. Free vibration. Natural frequencies.

Bruno Manoel Linares
brunomlinares@gmail.com
Universidade tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil

Diego Amadeu Furtado Torres
diegotorres@utfpr.edu.br
Universidade tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil

Recebido: 19 ago. 2019.

Aprovado: 01 out. 2019.

Direito autorial: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

A dinâmica é o estudo do comportamento de um corpo tendo como base as forças atuantes que promovem o seu movimento. O movimento de vibração é um tópico dentro da área da dinâmica, no qual se verifica um comportamento bem peculiar, visto que corpos sob o efeito de vibrações apresentam um movimento oscilatório em relação a uma posição de equilíbrio. A análise em vibração livre possibilita obter as frequências naturais e os modos de vibração típicos de um sistema, que são propriedades inerentes ao problema, consequência direta da geometria, da distribuição das propriedades materiais e das condições de contorno.

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG, e do inglês *Generalized Finite Element Method, GFEM*) (Duarte et al., 2000) busca superar algumas limitações que o Método de Elementos Finitos (MEF, e do inglês *Finite Element Method, FEM*) apresenta. Uma das limitações é a completa dependência das funções de aproximação em relação à malha empregada. Diante disso, o MEFG utiliza a propriedade da partição da unidade e promove enriquecimento extrínseco conforme estabelecido pelo Método de nuvens hp (do inglês *hp-Clouds Method*) (Oden et al., 1998).

Assim, o MEFG promove o compartilhamento da malha criada para a definição dos pontos de integração e das nuvens nodais, unindo a possibilidade de se utilizar as funções empregadas no MEF como PU à estratégia de enriquecimento extrínseco típicas do Método de nuvens hp. Deste modo, fica reduzida a dependência da malha na definição das funções de enriquecimento e mantém-se as conveniências do MEF no que diz respeito à imposição de condições de contorno e realização de integrações numéricas.

Embora o MEFG convencional apresente uma combinação interessante entre recursos do MEF e do Método de nuvens hp, ele carrega consigo uma limitação, que é a ocorrência de descontinuidades das derivadas do campo aproximado ao longo das interfaces inter-elementares. Essa limitação foi superada pela proposição da versão suave do MEFG (Duarte et al., 2006), que utiliza uma PU com continuidade arbitrária baseada em malha, permitindo assim recuperar a suavidade típica de aproximações por métodos sem malha e mantendo as vantagens do MEF.

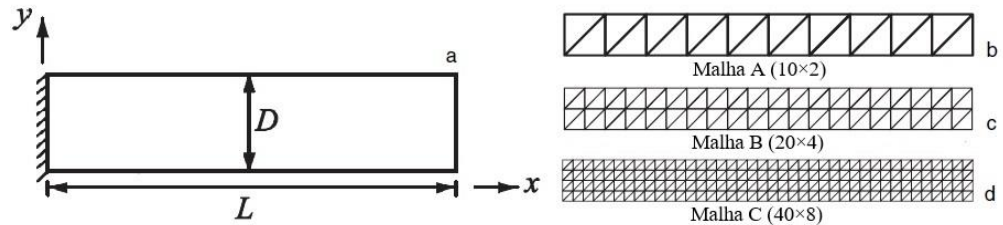
MATERIAL E MÉTODOS

O sistema bidimensional empregado para a análise consiste em uma viga com uma extremidade engastada e a outra livre, que apresenta um comprimento L , altura D e espessura t , como mostrado na Figura 1a. Este problema é frequentemente empregado em estudos de desempenho de métodos de aproximação em problemas de vibração livre (Liu e Nguyeng, 2010; Yang et al., 2016).

Os parâmetros geométricos utilizados foram: $L=100$ mm, $D=10$ mm e $t=1$ mm. Além disso, foi suposta a condição de Estado Plano de Deformações. Os parâmetros materiais, ou seja, Módulo de Young, o coeficiente de Poisson e a massa específica, utilizados foram, $E=21000$ kgf/mm², $\nu=0,3$ e $\rho=8,0 \times 10^{-10}$ kgfs²/mm⁴, respectivamente.

Foi implementado um código utilizando a linguagem do software Matlab™, com a finalidade de realizar o estudo de vibração livre do sistema. Foram definidas três malhas regulares com elementos triangulares, conforme figuras 1b, 1c e 1d.

Figura 1 – Geometria e malhas utilizadas na avaliação



Fonte: Yang et al. (2016).

Uma forma genérica das equações algébricas do movimento é apresentada na Eq. (1), onde \$[M]\$ representa a matriz de massa, \$[K]\$ representa a matriz de rigidez, \$[C]\$ representa a matriz de amortecimento e o vetor \$\{U\}\$ representa os deslocamentos do sistema.

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\} \quad (1)$$

Para um problema em vibração livre deve-se desconsiderar a capacidade interna de amortecimento do sistema e igualar a zero o vetor correspondente a força de excitação.

Utilizando-se do método de análise modal, descrito por Mendonça e Fancello (2019), a determinação das frequências naturais e os correspondentes modos de vibração são obtidos através de um problema de autopares, demonstrado na Eq. (2). O autovalor \$\lambda\$ do problema guarda a relação \$\lambda = \omega^2\$, com \$\omega\$, sendo a frequência natural do sistema, e por sua vez o autovetor \$\{\phi\}\$ representa o modo de vibração do sistema.

$$[[K] - \lambda [M]] \{\phi\} = 0 \quad (2)$$

As matrizes globais de massa e de rigidez são definidas com base na superposição das matrizes elementares. Para isso, as matrizes de rigidez e massa seguem a formulação variacional irreduzível conforme Mendonça e Fancello (2019).

O MEFG constrói as funções de aproximação através do enriquecimento da PU, realizando o produto entre a PU, \$\psi_\alpha\$, e as funções de enriquecimento, \$L_{i\alpha}\$, que podem ser definidas independentemente sobre cada nuvem nodal. Assim, as funções de aproximação são construídas seguindo os procedimentos descritos por Duarte et al. (2006) e de Barcellos et al. (2009).

Para isso, é considerada a expansão de Galerkin conforme Eq. (3), por exemplo, para uma componente de deslocamento. Evidencia-se que a aproximação é definida através da combinação linear das funções de aproximação associadas aos nós, onde \$b_{i\alpha}\$ é o coeficiente nodal generalizado associado a cada função de enriquecimento e \$u_\alpha\$ é o coeficiente nodal associado à PU. Além disso, \$N\$ é o número total de nós e \$q\$ é o número total de funções de enriquecimento do nó alfa.

$$u_x = \sum_{\alpha=1}^N \psi_\alpha(x) \{u_\alpha + \sum_{i=2}^q L_{i\alpha}(x) b_{i\alpha}\} \quad (3)$$

Neste trabalho, a construção da PU do MEFG convencional, que utiliza funções com continuidade C^0 , seguiu os procedimentos definidos por Duarte et al. (2000) e a construção da PU do MEFG suave, que utiliza funções com continuidade C^k , seguiu os procedimentos definidos por de Barcellos et al. (2009).

Os enriquecimentos em ambos os métodos foram realizados à maneira de Mendonça et al. (2011). É importante ressaltar que para a solução do problema de autovalores e autovetores, do MEFG convencional, foi necessária a utilização de um *shift* com a finalidade de tornar a matriz massa positiva definida, processo este utilizado no Método de Lanczos (Bostic, 1991).

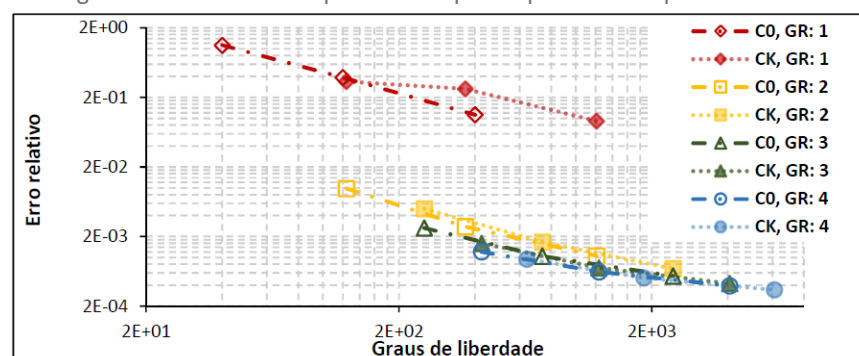
RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para verificar a confiabilidade das implementações e promover um estudo de erro, o problema também foi analisado empregando o software Ansys™. Esse software promove uma aproximação via MEF convencional, e sua utilização com malhas bem refinadas pode fornecer soluções de referência.

Assim, para utilizar os valores obtidos através da implementação via Ansys™ como uma solução referência, foi adotado uma malha (200x20) composta por elementos quadrangulares de 4 nós, que resulta em 8400 graus de liberdade após a inserção das condições de contorno.

A Figura 2 mostra o erro relativo, para a primeira frequência natural do sistema, em função do número de graus de liberdade das discretizações. O erro relativo foi calculado pela divisão do erro absoluto (MEFG – MEF) pelos valores do MEF. Os dados apresentados pelo MEFG convencional foram obtidos utilizando um valor de *shift* igual a 10^{-8} .

Figura 2 – Erro relativo apresentado para a primeira frequência natural



Fonte: Autoria própria (2019).

Deve-se ressaltar que no MEFG C^0 grau resultante 1 (GR:1), apenas a PU, que é uma função linear, compõe o subespaço de aproximação. Porém, no MEFG C^k grau resultante 1, a PU deve ser multiplicada por uma função de enriquecimento linear, visto que a PU C^k é obtida pela equação de Shepard e, portanto, não consegue representar sequer um polinômio linear. Para se obter graus resultantes maiores, deve-se aumentar o grau das funções de enriquecimento utilizadas.

Observa-se que o MEFG C^k apresenta a ocorrência de maiores graus de liberdade e menores erros mesmo para as malhas mais grosseiras, demonstrado

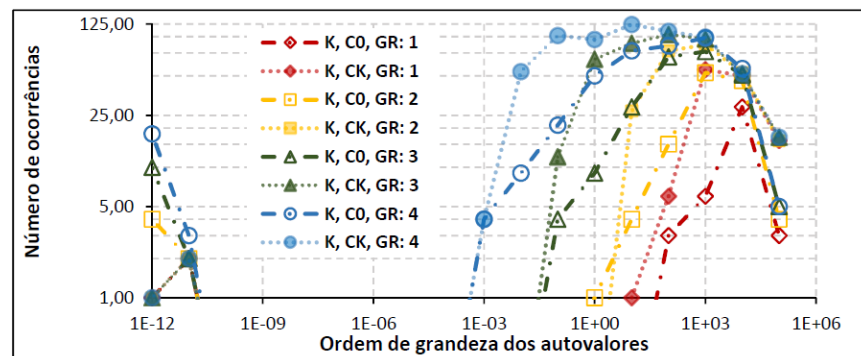
nos primeiros pontos das séries C0, GR:2 e CK, GR:2. Além disso, o aumento do grau das funções de enriquecimento provocou um crescimento na capacidade de aproximação de ambos os métodos, demonstrado na localização próxima dos dados das séries que representam graus resultantes maiores, acarretando na aproximação das retas que interligam os dados.

As ordens de grandeza dos autovalores podem ser relacionadas à um nível de energia do sistema, além disso, os autovalores guardam uma relação com os modos de deformação, que são obtidos através de seus autovetores. Portanto, ao se avaliar a distribuição dos autovalores das matrizes massa e rigidez globais, segundo a sua ordem de grandeza, é exposto a quantidade de modos de deformação que um dado nível de energia apresenta.

A análise se baseou nos dados coletados previamente à inserção de condições de contorno essenciais. Deste modo, são esperados três autovalores nulos em todas as situações, visto que representam os três movimentos de corpo rígido. Demais autovalores nulos que porventura surgem necessitam ser analisados com cautela, visto que podem ser consequência de dependência linear das funções de aproximação.

A Figura 3 mostra o número de ocorrência de autovalores, para a matriz de rigidez utilizando a malha A, em relação às suas ordens de grandeza. Observa-se sobre o eixo das ordenadas que a matriz de rigidez do MEFG C^k não apresenta um aumento na quantidade de autovalores, que podem ser considerados como nulos, quando se aumenta o enriquecimento. Já a matriz de rigidez do MEFG C^0 apresenta um aumento na ocorrência destes autovalores nulos, o que é um indicio de dependência linear.

Figura 3 – Distribuição dos autovalores da matriz de rigidez segundo a ordem de grandeza



Fonte: Autoria própria (2019).

Além disso, observa-se que o MEFG C^k apresenta uma maior quantidade de modos de deformação para um dado nível de energia se comparado ao MEFG C^0 , demonstrado nos dados sobre a linha de grade principal, proveniente da ordem de grandeza 1 dos autovalores. Isso é um indicio de que para um dado nível de energia o MEFG C^k apresenta uma contribuição maior de modos de deformação junto ao problema.

Considerando o número de condição das matrizes sendo a razão entre o maior autovalor e o menor autovalor não nulo, se baseando na Figura 3, constata-se que o número de condição das matrizes utilizadas no MEFG C^k se apresenta inferior ao das matrizes utilizadas no MEFG C^0 .

CONCLUSÃO

Nota-se que o MEFG C^k demonstra uma melhor capacidade de previsão das frequências naturais em malhas mais grosseiras se comparado ao MEFG C^0 . Além disso, é possível notar que a utilização de funções com uma elevada continuidade, para a construção da partição da unidade do MEFG C^k , resulta na remoção da dependência linear verificada para o MEFG C^0 . A não ocorrência de autovalores praticamente nulos (zeros de máquina) pode ser entendida com um melhor aproveitamento das funções de aproximação na construção dos modos de vibração.

REFERÊNCIAS

- BARCELLOS, C. S. de; MENDONÇA, P. T. R.; DUARTE, C. A. A C^k continuous generalized finite element formulations applied to laminated kirchhoff plate model. **Computational Mechanics**, v. 44, p. 377–393, 2009.
- BOSTIC, S. W. **Lanczos eigensolution method for high-performance computers**, 1991.
- DUARTE, C. A., BABUŠKA, I.; ODEN, J. T. Generalized finite element method for three-dimensional structural mechanics problems. **Computers and Structures**, v. 77, p. 215–232, 2000.
- DUARTE, C. A.; KIM, D. J.; QUARESMA, D. M. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 33–56, 2006.
- LIU, G. R.; NGUYEN, T. T. **Smoothed finite element methods**. 1. ed. Boca Raton, CRC Press, 2010
- MENDONÇA, P. T. R.; de BARCELLOS, C. S.; TORRES, D. A. F. Analysis of anisotropic Mindlin plate model by continuous and non-continuous GFEM. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47. p. 698–717, 2011.
- MENDONÇA, P. T. R.; FANCELLO, E. A. **O método de elementos finitos aplicado à mecânica dos sólidos**. 1. ed. Florianópolis, Editora Orsa Maggiore, 2019
- ODEN, J. T.; DUARTE, C. A.; ZIENKIEWICZ, O. C. A new cloud-based hp finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 153, p. 117–126, 1998.
- YANG, Y.; XU, D.; ZHENG, H. Application of the three-node triangular element with continuous nodal stress for free vibration analysis. **Computers and Structures**, v. 169. p. 69–80, 2016.