

Aplicação do método Híbrido-Trefftz de elementos finitos em elasticidade linear bidimensional

Application of Hybrid-Trefftz finite element method in two-dimensional linear elasticity

RESUMO

Este trabalho busca avaliar a precisão e desempenho da aplicação do método Híbrido-Trefftz de elementos finitos em problemas de elasticidade linear bidimensional em problema de estado plano de deformações, utilizando como objeto de estudo a modelagem de uma mola parabólica sob esforço utilizando elementos quadrangulares de 4 nós (Q4). Tal avaliação realizou-se examinando a convergência de solução e comparando os resultados com aqueles obtidos via aplicativo comercial. O método, que é completamente insensível à distorção de malha e consegue trabalhar facilmente com domínios complexos, apresentou resultados satisfatórios, demonstrando seu potencial como uma poderosa alternativa aos métodos convencionais de elementos finitos.

PALAVRAS-CHAVE: Convergência. Engenharia Mecânica. Molas. Tensões.

Lucas Bernardino Lulu
lucasl.2015@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Londrina, Paraná, Brasil

Diego Amadeu Furtado Torres
diegotorres@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Londrina, Paraná, Brasil

Recebido: 19 ago. 2019.

Aprovado: 01 out. 2019.

Direito autorial: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



ABSTRACT

This work aims to evaluate the precision and performance of the application of the Hybrid-Trefftz finite element method in two-dimensional linear elasticity problems in a plane strain state problem, using as an object of study the model of a parabolic spring under stress using four nodes quadrangular elements (Q4), this evaluation was performed by examining the solution convergence and comparing the results with those obtained by commercial software. The method, which is completely insensitive to mesh distortion and can work easily with complex domains, has shown satisfactory results, demonstrating its potential as a powerful alternative to conventional finite element methods.

KEYWORDS: Convergence. Mechanical Engineering. Springs. Stress.

INTRODUÇÃO

A solução de problemas de engenharia em domínio bidimensional utilizando o método convencional de elementos finitos (FEM – Finite Elements Method) se torna muito complicada em domínios complexos, como alternativa é possível aplicar o método de elementos de contorno (BEM – Boundary Elements Method), porém seu custo computacional é elevado e sua aplicação é difícil e ineficiente. Um método que pode ser uma opção interessante na solução de problemas com domínios complexos é o método Híbrido-Trefftz de elementos finitos, este método mescla conceitos de BEM e FEM, trabalhando com um campo de arestas/contornos (*Frame Field*) e outro de elementos independentes, ou seja, não demanda continuidade entre elementos.

Além disso, em problema homogêneo, o método trabalha exclusivamente com integrais de contorno, simplificando sua implementação e reduzindo o custo computacional.

Tais características permitem que o método trabalhe em qualquer domínio, malha e formato de elemento sem impactar na complexidade de aplicação.

Então, este trabalho busca avaliar a aplicação do método híbrido de Elementos Finitos em elasticidade linear bidimensional.

MATERIAIS E MÉTODOS

Inicialmente, realizou-se a implementação computacional do método, a codificação da formulação foi feita utilizando o MATLAB®.

Como demonstrado por Qin e Wang (2008), o variacional funcional que governa o problema de Elementos Finitos Híbrido na ausência de forças de corpo é dado em forma matricial por:

$$\Pi_{me} = -\frac{1}{2} \mathbf{c}_e^T \mathbf{H}_e \mathbf{c}_e + \mathbf{c}_e^T \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e - \mathbf{d}_e^T \mathbf{g}_e \quad (1)$$

Onde:

$$\mathbf{H}_e = \int_{\Gamma_e} \mathbf{Q}_e^T \mathbf{N}_e d\Gamma \quad (2)$$

$$\mathbf{G}_e = \int_{\Gamma_e} \mathbf{Q}_e^T \tilde{\mathbf{N}}_e d\Gamma \quad (3)$$

$$\mathbf{g}_e = \int_{\Gamma_t} \tilde{\mathbf{N}}_e \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (4)$$

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{n} \mathbf{T}_e \quad (5)$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (6)$$

Onde \mathbf{c}_e é um vetor de coeficientes incógnitos, \mathbf{d}_e é o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{N}_e é a matriz de soluções fundamentais, $\tilde{\mathbf{N}}_e$ é a matriz de funções de forma, $\bar{\mathbf{t}}$ é o vetor de carregamento prescrito, \mathbf{n} é a matriz de transformação

associada ao vetor normal direcionado para fora, T_e é a matriz de fundamental de componentes de tensão, Γ_e representa todo o contorno do elemento e Γ_t a região submetida à condição de contorno de Neumann. A solução para o campo aproximado de deslocamento $\mathbf{u}(x, y)$, é dada por:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_e \mathbf{c}_e + \mathbf{u}_{mr} \quad (7)$$

Sendo \mathbf{u}_{mr} a parcela referente à movimento de corpo rígido. Então, o vetor \mathbf{c}_e pode ser obtido por:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{G}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \quad (8)$$

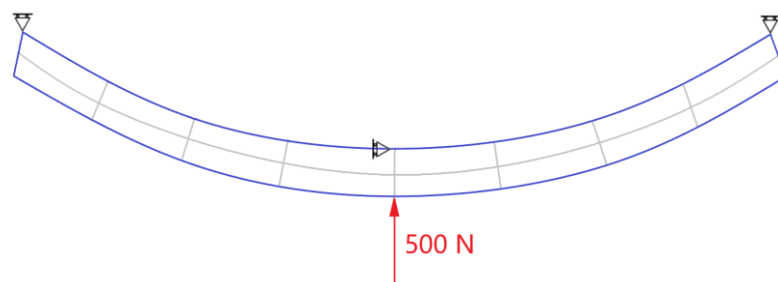
$$\mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{g}_e \quad (9)$$

$$\mathbf{c}_e = \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e \quad (10)$$

Onde \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez do elemento. A formulação brevemente apresentada pode ser estudada mais detalhadamente em Cao, Qin e Yu (2012).

Para o estudo da aplicação do método, realizou-se a modelagem de uma mola parabólica simplificada, com comprimento reto de 500 mm e espessura de 20 mm, com raio médio de arqueamento de 596,83 mm, representando um arco de 48°, submetida a uma força pontual de 500 N, com restrição de deslocamento y nas extremidades e x no centro submetida a estado plano de deformações, para análise considerou-se as propriedades materiais do aço ($E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ e $\nu = 0,3$, obtidas de Callister, 2010). Por se tratar de uma mola as análises de solução serão focadas nos deslocamentos y e tensões x . Uma ilustração do modelo pode ser visualizada na Figura 1.

Figura 1 – Representação do modelo com malha ilustrativa 2x8



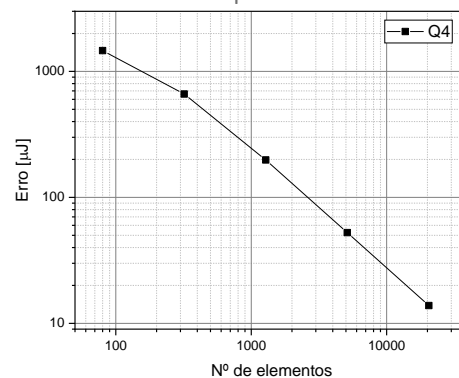
Fonte: autoria própria.

Para a solução via método híbrido, utilizou-se elementos quadrangulares de 4 nós (Q4) com as malhas de 4x20, 8x40, 16x80 e 32x160 e como referência para a análise de convergência de solução obteve-se os resultados fornecidos pelo Ansys, para validar a escolha de referência fez-se uma análise de convergência utilizando os erros estimados pelo aplicativo para energia total de deformação.

ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO VIA APLICATIVO COMERCIAL

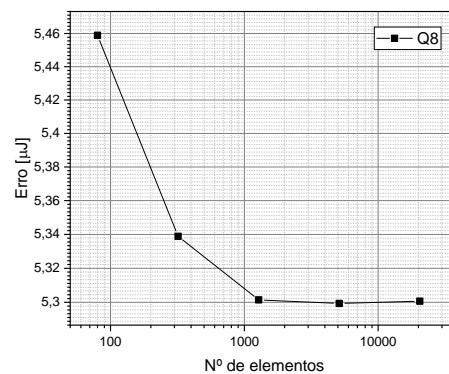
A avaliação do desempenho de fornecida pelo aplicativo foi realizada utilizando os estimadores de erro do aplicativo para energia total de deformação com as malhas 4x20, 8x40, 16x80, 32x160 e 64x320 com elementos quadrangulares de quatro (Q4) e oito (Q8) nós, os resultados coletados estão dispostos graficamente nas Figuras 2 e 3.

Figura 2 – Erro estimado na energia de deformação total para solução com elementos Q4 via aplicativo.



Fonte: autoria própria.

Figura 3 – Erro estimado na energia de deformação total para solução com elementos Q8 via aplicativo.



Fonte: autoria própria.

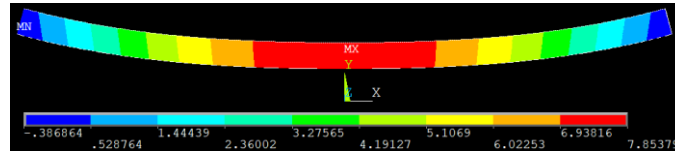
Observa-se que para ambos os tipos de elementos, o erro estimado tende à decrescer, além disso, como esperado, o elemento Q8 se mostrou significativamente mais preciso, indicando congruência no comportamento. Também é possível perceber que o erro estimado para as malhas de elementos Q8 tende a se estabilizar em $5,30 \times 10^{-6}$ J. Embora o maior refino da malha permita resultados mais precisos, esta estabilização ocorre, pois, com o aumento no número de elementos (e, portanto, operações matemáticas), o erro computacional tende a crescer, prejudicando a efetividade da malha.

Com esta análise, conclui-se que a solução fornecida pelo aplicativo pode ser utilizada como uma referência satisfatória, para tal, utiliza-se os resultados fornecidos pela malha 64x320 de elementos Q8.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

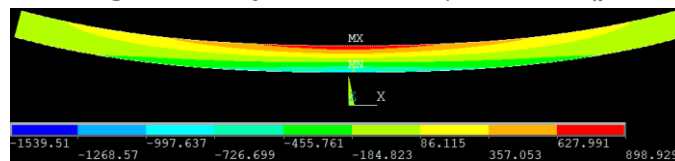
Os resultados obtidos via Ansys/APDL® podem ser visualizados nas Figuras 4 e 5.

Figura 4 – Solução de referência para deslocamento y .



Fonte: autoria própria.

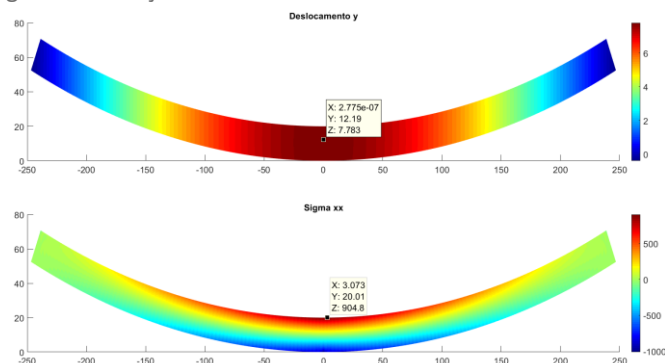
Figura 5 – Solução de referência para tensão σ_x .



Fonte: autoria própria.

Os resultados obtidos utilizando a malha 32x160 com o método híbrido podem ser visualizados na Figura 6, os pontos indicados são os maiores valores.

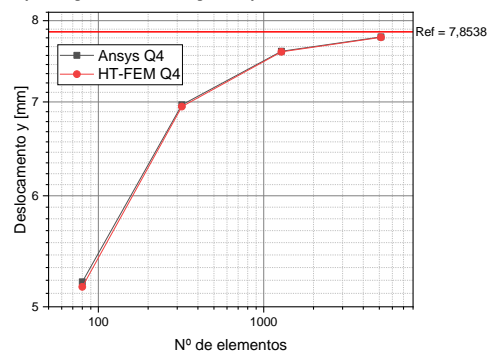
Figura 6 – Solução obtida com malha 32x160 via método híbrido.



Fonte: autoria própria.

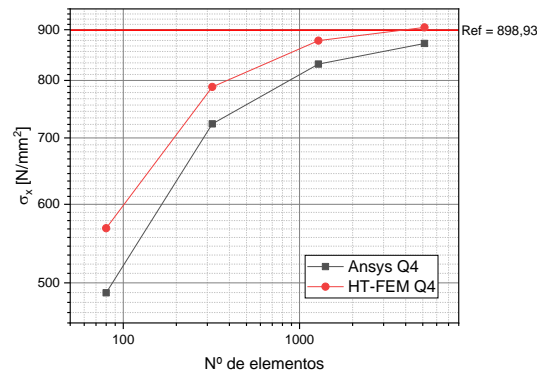
Para avaliar a convergência de solução, realizou-se a comparação dos valores obtidos via método híbrido e elementos Q4 no Ansys para máximo deslocamento y e tensão σ_x . As comparações podem ser observadas nas Figuras 7 e 8.

Figura 7 – Comparação de soluções para máximo deslocamento y .



Fonte: autoria própria.

Figura 8 – Comparação de soluções para máximo σ_x .



Fonte: autoria própria.

Observa-se que, para o deslocamento, as soluções obtidas utilizando o software e HT-FEM possuem características e valores muito semelhantes e para σ_x o método híbrido se mostrou mais preciso. Além disso, como pode ser observado nas Equações de (1) a (10), o problema homogêneo de HT-FEM possui apenas integrais de contorno, fato que diminui o custo computacional e permite sua aplicação nas mais variadas geometrias de domínios e elementos sem grandes impactos na complexidade de implementação.

CONCLUSÕES

O método híbrido se mostrou uma ferramenta muito robusta para a solução de problemas de elasticidade linear bidimensional, sendo capaz de apresentar resultados satisfatórios mesmo utilizando malhas com elementos pouco precisos (Q4). Em especial, se mostrou bastante satisfatório como estimador de tensão. Além disso, sua excelente capacidade de trabalhar com qualquer malha ou domínio aliada ao bom custo computacional torna o método uma forte alternativa na solução de problemas de engenharia.

REFERÊNCIAS

CALLISTER, W. D.; RETHWISCH, D.G. **Material Science and Engineering: An Introduction**. 8. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2010.

CAO, C.; QIN, Q.; YU, A. Novel Boundary-Integral Based Finite Element Method for 2D and 3D Thermo-Elasticity Problems. **Journal of Thermal Stresses**, v. 35, n. 10, p. 849-876, nov. 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/01495739.2012.720204>.

QIN, Q.; WANG H. **MATLAB and C Programming for Trefftz Finite Element Methods**. 1. ed. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2009.