https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2019

Um estudo sobre quantificadores de coerência quântica

A study on quantum coherence quantifiers

Eberson Taynan Tomazelli
ebersontomazelli@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Fagner Muruci de Paula
fagnermuruci@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

RESUMO

A coerência quântica é uma propriedade fundamental na teoria quântica, sendo uma fonte física essencial para tarefas de informação e computação quântica. Ela está associada com os elementos fora da diagonal principal da matriz densidade de um estado quântico com respeito a uma certa base de referência. Apesar da inestimável importância da coerência quântica, o desenvolvimento de uma teoria rigorosa para a sua caracterização foi iniciada somente recentemente. A coerência quântica em um sistema pode ser quantificada de diferentes perspectivas. Em particular, a coerência norma-l_1 vem sendo bastante empregada, especialmente por ser fácil de quantificar. Para um estado quântico arbitrário, a coerência norma-l_1 é dada simplesmente pela soma dos valores absolutos dos elementos fora da diagonal da matriz densidade. Neste trabalho, consideramos um estado geral de dois qubits (bits quânticos) descrito na base computacional e empregamos a operação de traço parcial para extrair o estado de cada qubit. Utilizando a coerência norma-l_1, mostramos que a coerência quântica do sistema é maior ou igual a soma das coerências quânticas dos subsistemas, fornecendo as condições necessárias para a igualdade ser satisfeita, onde a coerência quântica obedece a uma lei de conservação.

PALAVRAS-CHAVE: Coerência quântica. Computação quântica. *Qubits*. Teoria quântica.

Recebido: 19 ago. 2019.
Aprovado: 01 out. 2019.

ABSTRACT

Quantum coherence is a fundamental property in quantum theory, being an essential physical resource for quantum information and computation tasks. It corresponds to the nonvanishing off-diagonal elements of the density matrix of a quantum state with respect to a certain reference basis. Despite the invaluable importance of the quantum coherence, the development of a rigorous theory for its characterization has been initiated only recently. The quantum coherence in a system can be quantified from different perspectives. In particular, the l1-norm of coherence has been widely employed, especially for its ease of quantify. For an arbitrary quantum state, the l1-norm of coherence it is simply given by the sum of the absolute values do the off-diagonal elements of the density matrix. In this work, we consider a general two-qubit state (quantum bits) described in the computational basis and we have employed the partial trace operation to extract the state of each qubit. By using the l1-norm of coherence, we have shown that the quantum coherence of the system is greater than or equal to the sum of the quantum coherences of the subsystems, providing the necessary conditions for the equality to be satisfied, where the quantum coherence obeys a conservation law.

KEYWORDS: Quantum coherence. Quantum computation. *Qubits*. Quantum theory.

INTRODUÇÃO

A Mecânica Quântica é uma teoria que apresenta características contraintuitivas como, por exemplo, o princípio da incerteza de Heisenberg, que descreve um limite na precisão com que certos pares de propriedades de uma partícula (como posição e momento) podem ser conhecidos (EISBERG; RESNICK, 1980). Podemos citar também a coerência quântica, uma propriedade que está atrelada ao princípio da superposição de estados quânticos e relacionada com correlações quânticas (FERRARO, 2009) no caso de sistemas compostos, tal como o emaranhamento, um conceito referenciado primeiramente no paradoxo de Schrödinger (SCHRÖDINGER, 1935) e posteriormente analisado no paradoxo de EPR (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935). Perry (2006) afirma que "emaranhamento é a capacidade de pares de partículas interagirem a qualquer distância simultaneamente". Esse tipo de propriedade serve como recurso para a realização de tarefas na área de Informação e Computação Quântica, tais como a criptografia quântica e o teletransporte quântico (NIELSEN; CHUANG, 2000).

Atualmente, há um grande interesse em pesquisas sobre a coerência quântica em Óptica Quântica, Física do Estado Sólido, Termodinâmica Quântica, Física biológica (HUELGA; PLENIO, 2013), entre outras áreas. Apesar do papel fundamental da Coerência Quântica, uma teoria rigorosa para a quantificação da coerência quântica foi desenvolvida apenas recentemente (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014). O objetivo do nosso trabalho é explorar as características de um quantificador de coerência quântica baseado na norma-l_1 (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014), aplicado a sistema de dois *qubits*, onde um *qubit*, também conhecido como bit quântico, é um sistema quântico de dois estados. Neste trabalho, fornecemos as condições necessárias sobre o estado geral de tal sistema para que a coerência quântica se apresente como uma quantidade conservada.

METODOLOGIA

Para amparar o leitor à ideia central desta pesquisa faz-se necessário introduzir alguns conceitos fundamentais em Mecânica Quântica. Nesta seção, discutiremos brevemente sobre a notação de Dirac, operador densidade, sistema composto e coerência quântica.

A notação de Dirac é a notação padrão para descrever o estado de um sistema físico em mecânica quântica. Nesta notação, um estado é definido por um *ket* $|\mathrm{u}\rangle$ (um vetor unitário) pertencente ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ (espaço de vetores unitários complexos):

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{H}. \qquad (1)$$

Em mecânica quântica, postula-se que a máxima informação sobre um sistema é fornecida pelo *ket* de estado. Para todo *ket* $|\mathrm{u}\rangle$ existe um *bra dual* $\langle u|$ definido pelo vetor linha $\langle u| = (u_1^* \ u_2^* \ \ldots u_n^*)$, onde *n* denota a dimensão do espaço de Hilbert (NIELSEN; CHUANG, 2000).

O formalismo discutido acima é válido apenas quando o sistema quântico está em um estado bem definido (estado puro). No caso mais geral, onde associa-se ao sistema uma mistura de estados, utiliza-se o *operador (matriz) densidade* ρ em lugar do *ket* de estado. O operador densidade é definido por (NIELSEN; CHUANG, 2000).

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i, \tag{2}$$

onde $\sum_i p_i = 1$ e $0 \leq p_i \leq 1$, sendo p_i a probabilidade de encontra o sistema no estado puro $\rho_i = |u_i\rangle\langle u_i|$. As principais propriedades do operador densidade são:

$$\mathrm{Tr}(\rho) = 1, \tag{3}$$

$$0 \leq Tr(\rho^2) \leq 1, \tag{4}$$

$$\rho = \rho^\dagger = \rho^{T^*}, \tag{5}$$

$$\rho \geq 0. \tag{6}$$

Nas equações acima, Tr(*M*) representa o traço da matriz *M* (isto é, a soma dos elementos da diagonal principal de *M*) e $M^\dagger$ denota a matriz adjunta de *M* (ou seja, a matriz obtida tomando-se a transposta seguida do complexo conjugado dos elementos de matriz). Para estados puros, tem-se $\rho^2 = \rho$ e, consequentemente, a pureza é máxima: $\mathrm{Tr}(\rho)^2 = 1$. No caso de um estado maximamente misto, descrito pelo operador identidade $\rho = I$, a pureza é nula: $\mathrm{Tr}(\rho)^2 = 0$.

Consideremos o sistema quântico composto mais simples, formado por dois subsistemas, A e B, associados aos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, respectivamente. Postula-se que o espaço de Hilbert do sistema global é dado pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert das partes, ou seja, $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. No caso especial no qual as partes são *qubits*, o espaço de Hilbert tem dimensão 4 e a base computacional correspondente é dada por $\{|0_A\rangle, |1_A\rangle\} \otimes \{|0_B\rangle, |1_B\rangle\} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ (NIELSEN; CHUANG, 2000). Portanto, um estado puro arbitrário de um sistema de dois *qubits* apresenta a forma

$$|\mathrm{u_{AB}}\rangle = \mathrm{c_{00}}|00\rangle + \mathrm{c_{01}}|01\rangle + \mathrm{c_{10}}|10\rangle + \mathrm{c_{11}}|11\rangle. \tag{7}$$

com c_{ij} representando a amplitude de probabilidade de encontrar o sistema no estado $|ij\rangle$. No caso geral, a matriz densidade de um sistema composto de dois *qubits* é dada por uma matriz 4x4

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} \rho_{0000} & \rho_{0001} & \rho_{0010} & \rho_{0011} \\ \rho_{0100} & \rho_{0101} & \rho_{0110} & \rho_{0111} \\ \rho_{1000} & \rho_{1001} & \rho_{1010} & \rho_{1011} \\ \rho_{1100} & \rho_{1101} & \rho_{1110} & \rho_{1111} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

onde os elementos $\rho_{ijkl} = \langle ij|\rho|kl\rangle$ para (*i, j, k, l* = 0 ou 1) devem satisfazer as propriedades descritas pelas equações (3), (4), (5) e (6).

A coerência quântica desempenha um papel fundamental na física, uma vez que está associada a ocorrência de correlações quânticas em sistemas compostos, tais como o emaranhamento e discórdia. Estes fenômenos possuem grandes aplicações em inúmeras áreas, incluindo a computação e informação quântica. Matematicamente, a coerência quântica está ligada aos elementos fora da diagonal principal da matriz densidade em uma determinada base de referência.

Dentre as medidas de coerência, destaca-se o quantificador baseado na norma-l_1 proposto por (BAUMGRATZ; CRAMER; PLENIO, 2014), dado pela seguinte expressão:

$$C(\rho) = \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} |\rho_{ij}|. \tag{9}$$

Ou seja, a coerência quântica de um sistema qualquer descrito por uma matriz densidade ρ é dada simplesmente pela soma dos módulos dos elementos de ρ que se encontram fora da diagonal principal.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Consideremos um sistema de dois *qubits*, A e B. Na base computacional, $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, a matriz densidade na Eq. (8) pode ser escrita na forma

$$\rho_{AB} = \sum_{ijkl} \rho_{ijkl} |ij\rangle\langle kl| = \rho_{0000}|00\rangle\langle 00| + \rho_{0001}|00\rangle\langle 01| + \rho_{0010}|00\rangle\langle 10| + \rho_{0011}|00\rangle\langle 11| + \rho_{0100}|01\rangle\langle 00| + \rho_{0101}|01\rangle\langle 01| + \rho_{0110}|01\rangle\langle 10| + \rho_{0111}|01\rangle\langle 11| + \rho_{1000}|10\rangle\langle 00| + \rho_{1001}|10\rangle\langle 01| + \rho_{1010}|10\rangle\langle 10| + \rho_{1011}|10\rangle\langle 11| + \rho_{1100}|11\rangle\langle 00| + \rho_{1101}|11\rangle\langle 01| + \rho_{1110}|11\rangle\langle 10| + \rho_{1111}|11\rangle\langle 11|. \tag{10}$$

Empregando a operação traço parcial no estado global ρ_{AB}, encontramos os estados de cada *qubit*, ρ_A e ρ_B. O estado de A foi obtido traçando a parte B:

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\{\rho_{AB}\} = \langle 0_B|\rho_{AB}|0_B\rangle + \langle 1_B|\rho_{AB}|1_B\rangle = \rho_{0000}|0\rangle\langle 0| + \rho_{0010}|0\rangle\langle 1| + \rho_{1000}|1\rangle\langle 0| + \rho_{1010}|1\rangle\langle 1| + \rho_{0101}|0\rangle\langle 0| + \rho_{0111}|0\rangle\langle 1| + \rho_{1101}|1\rangle\langle 0| + \rho_{1111}|1\rangle\langle 1| = (\rho_{0000} + \rho_{0101})|0\rangle\langle 0| + (\rho_{0010} + \rho_{0111})|0\rangle\langle 1| + (\rho_{1000} + \rho_{1101})|1\rangle\langle 0| + (\rho_{1010} + \rho_{1111})|1\rangle\langle 1|. \tag{11}$$

Na forma matricial, ρ_A é dado por

$$\rho_A = \begin{bmatrix} \rho_{0000} + \rho_{0101} & \rho_{0010} + \rho_{0111} \\ \rho_{1000} + \rho_{1101} & \rho_{1010} + \rho_{1111} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Da mesma forma, determinamos o estado de B traçando a parte A:

$$\rho_B = \mathrm{Tr}_A\{\rho_{AB}\} = \langle 0_A|\rho_{AB}|0_A\rangle + \langle 1_A|\rho_{AB}|1_A\rangle = \rho_{0000}|0\rangle\langle 0| + \rho_{0001}|0\rangle\langle 1| + \rho_{0100}|1\rangle\langle 0| + \rho_{0101}|1\rangle\langle 1| + \rho_{1010}|0\rangle\langle 0| + \rho_{1011}|0\rangle\langle 1| + \rho_{1110}|1\rangle\langle 0| + \rho_{1111}|1\rangle\langle 1| = (\rho_{0000} + \rho_{1010})|0\rangle\langle 0| + (\rho_{0001} + \rho_{1011})|0\rangle\langle 1| + (\rho_{0100} + \rho_{1110})|1\rangle\langle 0| + (\rho_{0101} + \rho_{1111})|1\rangle\langle 1|. \tag{13}$$

Na forma matricial, tem-se

$$\rho_B = \begin{bmatrix} \rho_{0000} + \rho_{1010} & \rho_{0001} + \rho_{1011} \\ \rho_{0100} + \rho_{1110} & \rho_{0101} + \rho_{1111} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Em seguida, aplicando o quantificador de coerência quântica baseado na norma-l_1, dado pela Eq. (9), e utilizando a propriedade da Eq. (5), obtivemos a coerência dos subsistemas A e B, bem como a coerência do sistema global. Essas coerências são dadas, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$C(\rho_A) = |\rho_{0010} + \rho_{0111}| + |\rho_{1000} + \rho_{1101}| = 2|\rho_{0010} + \rho_{0111}|, \tag{15}$$

$$C(\rho_B) = |\rho_{0001} + \rho_{1011}| + |\rho_{0100} + \rho_{1110}| = 2|\rho_{0001} + \rho_{1011}|, \tag{16}$$

$$C(\rho_{AB}) = 2(|\rho_{0001}| + |\rho_{0010}| + |\rho_{0011}| + |\rho_{0110}| + |\rho_{0111}| + |\rho_{1011}|). \quad (17)$$

Por fim, escrevendo a coerência do estado global na forma

$$C(\rho_{AB}) = 2(|\rho_{0010}| + |\rho_{0111}|) + 2(|\rho_{0001}| + |\rho_{1011}|) + 2(|\rho_{0011}| + |\rho_{0110}|), \quad (18)$$

e utilizando a desigualdade triangular $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$, onde z_i é um número complexo, mostramos que a coerência do sistema global deve ser maior ou igual a soma da coerência das partes, isto é:

$$C(\rho_{AB}) \geq C(\rho_A) + C(\rho_B), \quad (19)$$

onde concluímos que a igualdade $C(\rho_{AB}) = C(\rho_A) + C(\rho_B)$ é satisfeita sob as condições $\rho_{0011} = \rho_{0110} = 0$, $|\rho_{0010}| + |\rho_{0111}| = |\rho_{0010} + \rho_{0111}|$ e $|\rho_{0001}| + |\rho_{1011}| = |\rho_{0001} + \rho_{1011}|$. Neste caso, podemos assumir a coerência quântica como uma quantidade conservada, assim como a energia, momento linear, momento angular, carga elétrica, entre outras grandezas físicas.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, exploramos as características da coerência quântica em sistemas compostos. Em particular, investigamos uma medida de coerência quântica baseada na norma-l_1, aplicada a um sistema de dois *qubits*. Considerando um estado geral para o referido sistema, descrito por uma matriz densidade 4x4 na base computacional, empregamos a operação traço parcial para extrair o estado de cada *qubit*. Em seguida, utilizando o quantificador de coerência quântica definido em termos da norma-l_1, mostramos que a coerência quântica do sistema composto deve ser maior ou igual a soma das coerências quânticas dos subsistemas. Por fim, fornecemos as condições necessárias sobre os elementos da matriz densidade do sistema composto para que a igualdade nessa relação demostrada seja satisfeita, com o intuito de buscar sistemas físicos onde a coerência quântica é conservada.

REFERÊNCIAS

EISBERG, R., RESNICK, R. **Física Quântica**: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas. 1979, Elsevier Editora Ltda.

FERRARO, A. et al. Almost all quantum states have non-classical correlations. quantph/09083157, 2009.

SCHRöDINGER, E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. Naturwissenschaften, 23, 807-812; 823-828; 844-849. Tradução por John D. Trimmer, Proceedings of the American Philosophical Society, 124, 323, 1980.

PERRY, R. T. (2006) **The temple of quantum computation**. Disponível em: <http://www.toqc.com/>. Acesso em: 15 ago. 2019.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and Quantum information**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

YANOFSKY, Noson S.; MANNUCCI, Mirco A.. **Quantum Computing For Computer Scientists**. New York: Cambridge University Press, 2008. 402 p.

S.F. Huelga & M.B. Plenio (2013) **Vibrations, quanta and biology, Contemporary Physics**, 54:4, 181-207, DOI: 10.1080/00405000.2013.829687

BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. **Quantifying coherence**. Physical Review Letters, v. 113, n. 14, p. 140401–1–140401–5, 2014.