

<https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2019>

Solução analítica e numérica de uma equação diferencial parcial hiperbólica utilizando o Método das Características

Analytical and numerical solution of a hyperbolic partial differential equation using the Characteristic Method

RESUMO

Urias de Moura Bueno Neto
uriasneto@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

Adilandri Mércio Lobeiro
alobeiro@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

A obtenção da solução analítica é de extrema importância para a modelagem com maior precisão de fenômenos físicos e para validar métodos numéricos através de comparação. Este trabalho utiliza o método das características para obter a solução analítica e numérica de uma equação diferencial parcial hiperbólica. Para isso, encontrou-se suas curvas características e mediante uma mudança de variável reduziu-se a equação para sua forma canônica e após integração utilizando as condições de contorno e iniciais obteve-se a solução analítica para o problema de Cauchy e, para a numérica discretizou-se o domínio em malha triangular através das inclinações características e acrescentando as invariantes de Riemann obteve-se a solução numérica do problema de valor inicial. Conclui-se que o método das características utiliza ferramentas básica do cálculo diferencial e integral, resultando em cálculos mais simples para chegar a solução da equação diferencial parcial

PALAVRAS-CHAVE: Equação da onda. Solução numérica. Solução analítica.

Recebido: 19 ago. 2019.

Aprovado: 01 out. 2019.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



ABSTRACT

Obtaining the analytical solution is extremely important for the more accurate modeling of physical phenomena and for validating numerical methods through comparison. This work uses the characteristics method to obtain the analytical and numerical solution of a hyperbolic partial differential equation. For this, its characteristic curves were found and by means of a variable change the equation was reduced to its canonical form and after the integration and using the boundary and initial conditions the analytical solution to the Cauchy problem was obtained. the numeric discretized the domain in triangular mesh through the characteristic slopes and adding the invariants of Riemann obtained the numerical solution of the initial value problem. It is concluded that the characteristics method uses basic tools of differential and integral calculus, resulting in simpler calculations to arrive at the solution of the partial differential equation.

KEYWORDS: Wave equation. Numerical solution. Analytical solution.

INTRODUÇÃO

O Método das Características (MC) é uma técnica consagrada por obter a solução numérica de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) hiperbólicas. O método consiste em transformar a EDP em um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) (EVANS, 1998).

Ambas as soluções do problema consistem em descrever as características físicas e matemáticas, sendo essas o meio e a forma de propagação imposta no sistema, assim a solução analítica pode ser obtida através da substituição de variáveis, que consiste em parametrizar uma curva inicial que fornece as condições de bordo do problema, introduzindo sobre ela uma família de curvas características que são vitais para obter-se a solução da EDP (LOBEIRO, 2012).

A solução numérica se baseia em encontrar as inclinações características que são fundamentais para a discretização do domínio em malha triangular, então utiliza-se mais as Invariantes de Riemann para se obter a imagem dos pontos contidos no domínio (LOBEIRO, 2013).

Inúmeros estudos utilizaram o MC para resolução de diversos problemas físicos e de Engenharia, através de modelos computacionais, como Konikow et. al (1996) utilizaram o MC para simular o transporte de um único soluto em um campo tridimensional para o fluxo de águas subterrâneas, Martin (2005) aplicou o MC para resolver o problema de capacidade suporte geotécnico clássico de um pé de tira rígido verticalmente carregado apoiado em um meio-espaço coesivo-friccional e Chang (1989) aplicou o método para analisar linhas de transmissão com perdas acopladas.

Neste estudo buscou-se encontrar as soluções analítica e numérica de uma EDP hiperbólica de segunda ordem quase linear via método das características, a fim de atestar a veracidade do método demonstrando sua ótima precisão ao comparar a imagem da solução numérica em relação a solução analítica para a mesma EDP.

MATERIAL E MÉTODOS

SOLUÇÃO ANALÍTICA

Uma equação diferencial parcial de segunda ordem quase linear sobre um conjunto aberto, $\Omega \subset R^2$, pode ser escrita na forma,

$$A(x, t) u_{xx} + B(x, t) u_{xt} + C(x, t) u_{tt} + F = 0, \quad (1)$$

em que a variável dependente $u = u(x, t)$ é uma função desconhecida, onde x e t são as variáveis independentes que representam o espaço e o tempo respectivamente. Pelo menos um dos coeficientes $A(x, t)$, $B(x, t)$ e $C(x, t)$ deve ser não nulo. Em problemas hiperbólicos duas inclinações reais das curvas características são encontradas, uma positiva e outra negativa. Essas inclinações são obtidas para qualquer EDP de segunda ordem por meio das expressões,

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_+ = \frac{B(x,t) + \sqrt{B(x,t)^2 - 4A(x,t)C(x,t)}}{2A(x,t)} \quad \text{e} \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_- = \frac{B(x,t) - \sqrt{B(x,t)^2 - 4A(x,t)C(x,t)}}{2A(x,t)} \quad (2)$$

onde as equações (2) são fundamentais para a resolução do problema.

Como estudo de caso, apresenta-se o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < 1 \text{ e } 0 < t < 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \text{para } t > 0, \\ u(x, 0) = \text{sen}(\pi x), & 0 \leq x \leq 1, \text{ para } t = 0, \\ u_t = 0, & 0 \leq x \leq 1, \text{ para } t = 0 \end{cases} \quad (3)$$

onde, apresenta-se a seguir a sua solução analítica, via MC. Para isso encontra-se as curvas características da equação,

$$-4u_{xx} + u_{tt} = 0,$$

que ao aplicar as equações (2) obteve-se as seguintes inclinações,

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_+ = +\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_- = -\frac{1}{2}. \quad (4)$$

Aplicando a antiderivada em (4), encontrou-se as curvas características $t(x) = \frac{1}{2}x + k_1$ e $t(x) = -\frac{1}{2}x + k_2$, onde ambas foram necessárias para realizar as mudanças de variáveis e reduzir a equação na sua forma canônica em função das variáveis ξ e η ,

$$w_{\xi\eta} = 0. \quad (5)$$

Integrando (5) e realizando a mudança de variável retorna-se as variáveis independentes x e t encontrando,

$$u(x, t) = \Theta\left(t - \frac{1}{2}x\right) + \Psi\left(t + \frac{1}{2}x\right). \quad (6)$$

Onde Θ e Ψ são funções arbitrárias de classe $C^2(\Omega)$ e $C^1(\Omega)$, respectivamente. Ao aplicar as condições iniciais e de contorno, encontra-se,

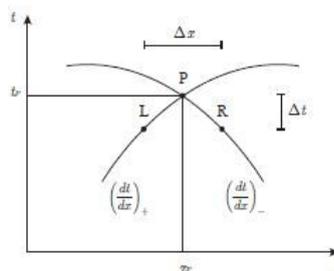
$$u(x, t) = \text{sen}(\pi x)\cos(2\pi t), \quad (7)$$

sendo a equação (7) a solução analítica do problema (3).

SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para a solução numérica utiliza-se as inclinações (2). As coordenadas x_p e t_p são correspondentes ao ponto P , obtêm-se os pares ordenados para os pontos periféricos L e R implantando uma malha triangular, cuja a precisão oscila de acordo com Δx e Δt (Figura 1), encontra-se os demais pontos aplicando uma integral definida, partindo de um ponto conhecido até o ponto que se deseja descobrir.

Figura 1 – Representação das inclinações interceptando os pontos L , P e R .



Fonte: Autoria própria (2019).

As Invariantes de Riemann dadas por $p = u_l(x, 0)$ e $q = u_x(x, 0)$ em $t = 0$, são fornecidas pelas condições iniciais e para o restante do domínio as invariantes foram obtidas por meio do Método Das diferenças Finitas.

Identificados os valores das Invariantes sobre a malha em um instante t , calcula-se a solução numérica $w(x, t) \approx u(x, t)$ em um instante $t + 1$ através de série de Taylor aplicada aos pontos P e L ,

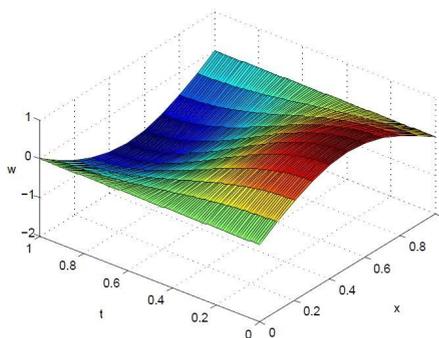
$$w_p \approx w_l + \frac{\Delta x}{2}(p_P + p_L) + \frac{\Delta t}{2}(q_p + q_L) . \quad (8)$$

A imagem de $w(x, t)$ ao longo dos pontos L e R foi desenvolvida por interpolação cúbica da mesma forma para todos os pontos existentes no plano xt .

RESULTADOS

Utilizando o software MATLAB, foi implementado um algoritmo, desta forma plotou-se o gráfico da superfície integral que corresponde a solução numérica $w(x, t)$ (Figura 2).

Figura 1 – Superfície gerada no MatLab correspondente a solução numérica.



Fonte: Autoria própria (2019).

As soluções analítica e numérica foram comparadas pelo algoritmo gerado no MatLab, destacando a precisão do MC, então foi atestada a veracidade do MC.

Tabela 1 – Comparação entre as soluções numérica e analítica do problema

x	t	$w(x, t)$	$u(x, t)$
0.50	0.70	-0.3085	-0.3090
0.50	0.71	-0.2482	-0.2487
0.50	0.72	-0.1869	-0.1874
0.50	0.73	-0.1248	-0.1253

Fonte: Autoria própria (2019).

DISCUSSÃO

Obter a solução analítica de uma EDP, quando possível, é primordial para garantir maior precisão do resultado e, quando não for possível obter a solução analítica, a resolução dos problemas é feita pela aplicação de um método numérico.

Ao trabalhar com o Método das Características observou-se que além de obter a solução numérica, como é de praxe em outros métodos, ele também fornece a solução analítica para a equação hiperbólica e comparando as duas soluções observou-se a eficácia do Método, semelhante ao constatado por Kinkow et. al (1996) em um exemplo prático expõe ser vantajoso aplicação numérica do MC para o problema de transporte de soluto em meios porosos, onde o método teve êxito sobre outros esquemas numéricos padrões, para problemas transporte em que a advecção é dominante processo, simulou o transporte de soluto em um aquífero unidimensional com êxito destacando a ótima precisão, destacando com exceção de alguns pontos um ajuste exato entre a solução analítica e numérica do MC para um modelo numérico computacional.

Destaca-se nesse trabalho o MC, que além de ser utilizado para obter a solução numérica de equações diferenciais com boa precisão assim como Garder et. al. (1964), que ao trabalhar com um modelo numérico baseado no MC constatou que o mesmo era bem acurado, sendo que os resultados obtidos eram significativos devido, a precisão do método.

CONCLUSÃO

A grande importância de se obter a solução analítica de um problema é que a imagem obtida é a mais precisa. A importância de se encontrar a solução analítica da equação da onda é que ela simula inúmeros fenômenos físicos.

Como apresentado, a literatura possui trabalho que utilizam o Método das Características para obter a solução numérica de EDPs, sendo em sua maioria equações de primeira ordem. No entanto, observou-se nesse trabalho que o método fornece quando possível, a solução analítica da equação.

É importante salientar a eficiência do Método das Características e sua simplicidade, pois, utiliza ferramentas básicas do cálculo diferencial e integral para encontrar a solução da equação diferencial parcial. Além disso o presente estudo demonstra ser viável empregar o MC para a resolução de problemas físicos (como o oscilador harmônico) quanto de engenharia (tal como as equações de Saint Venant para modelagem de escoamento fluvial).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Universidade Tecnológica Federal do Paraná pela pelo suporte à pesquisa.

REFERÊNCIAS

CHANG, F. Y. The generalized method of characteristics for waveform relaxation analysis of lossy coupled transmission lines. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, v. 37, n. 12, p. 2028-2038, 1989.

EVANS, L. C. Partial differential equations. (Graduate Studies in Mathematics), **American Mathematical Society**, Vol. 19, 1998. p. 68.

GARDER, A. O.; PEACEMAN, D. W.; POZZI, A. L. Numerical calculation of multidimensional miscible displacement by the method of characteristics. **Society of Petroleum Engineers Journal**, v. 4, n. 01, p.26 -36, 1964.

KONIKOW, L. F.; GOODE, D. J.; HORNBERGER, G. Z. A three-dimensional method-of-characteristics solute-transport model (MOC3D). **Water-Resources Investigations Report**, v.96, p. 4267, 1996.

LOBEIRO, A. M. **Solução das equações de Saint Venant em uma e duas dimensões usando o método das características**. 2012. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

LOBEIRO, A. M.; GRAMANI, L. M.; KAVISKI, E.; PALOMINO, J. A. S.; GONZATTO JUNIOR, O. A. Solução da equação do telégrafo pelo método das características usando uma maplet. **Ciências Exatas e Naturais**, Guarapuava, 2013.

MARTIN, C. M. Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics. **Proceedings of the 11th International Conference of IACMAG**, Turin, v. 4, p. 441-450, 2005.