

Modelos não lineares de sistemas de controle com aplicação de uma inferência *fuzzy*

Nonlinear models of control systems with the application of a *fuzzy* inference

RESUMO

Este trabalho desenvolve uma técnica de controle de sistemas não lineares com base na linearização desse sistema em regiões distintas. Essa técnica consiste em aplicar uma inferência *fuzzy* em um sistema não linear para atuar como um controlador supervisor. Dessa forma, é possível determinar a combinação de controladores lineares mais adequada a ser utilizada, de acordo com as suas variáveis de estado. Para desenvolver essa aplicação, o plano de fase foi dividido em regiões e, para cada uma delas, o sistema foi linearizado em torno de cada ponto central e um controlador foi desenvolvido utilizando a técnica de alocação de polos. Com os controladores construídos, a inferência *fuzzy* atua analisando as variáveis de entrada do sistema e combina os controladores para fornecer um controlador intermediário, capaz de controlar o sistema. A implementação dessa técnica é feita em um sistema de um pêndulo invertido, pois possui uma dinâmica não linear.

PALAVRAS-CHAVE: Inferência *fuzzy*. Sistema não linear. Técnica de controle.

ABSTRACT

This paper develops a technique for controlling non-linear systems based on the linearization of this system in different regions. This technique consists of applying a fuzzy inference in a non-linear system to act as a supervisory controller. Therefore, it is possible to determine the most suitable combination of linear controllers to be used, according to their state variables. To develop this application, the phase plan was divided into regions and, for each of them, the system was linearized around each central point and a controller was developed using the pole allocation technique. With the controllers built, the Fuzzy inference works by analyzing the input variables of the system and combines the controllers to provide an intermediate controller, capable of controlling the system. This technique is implemented in an inverted pendulum system, as it has a non-linear dynamic.

KEYWORDS: Fuzzy inference. Non-linear system. Control technique.

Monique Gabrielle de Souza Sobrinho
moniquegabrielle@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, PR, Brasil

Glaucia Maria Bressan
glauciabressan@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, PR, Brasil

Cristiano Marcos Agulhari
alopcri@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, PR, Brasil

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

Um sistema é definido como uma junção de partículas que atuam em conjunto, com a finalidade de atingir certo objetivo (OGATA, 2010). Do ponto de vista matemático, esses sistemas podem ser classificados de diferentes formas, uma delas é a análise da linearidade. Define-se como *sistema linear* qualquer sistema que atenda as propriedades de homogeneidade e aditividade (LATHI, 2007). Dessa forma, qualquer sistema que não atenda a esses requisitos pode ser classificado como um *sistema não linear*.

No mundo real, muitas vezes um sistema é linear vale apenas em intervalos limitados de atuação (OGATA, 2010), fazendo com que muitos dos sistemas sejam não lineares. Para esse tipo de sistema, o controle clássico não garante um bom desempenho. Pensando nessa questão, (DUPONT, 2010) utilizou a inferência *fuzzy* em conjunto com a técnica de linearização para propor uma outra solução para o problema em questão. A lógica *fuzzy* (PEDRYCZ, 1998) permite efetuar uma análise mais realista das informações, classificando os valores de 0 a 1, indicando o grau de compatibilidade com determinada característica.

Com base nesses conhecimentos, o objetivo deste trabalho é aplicar uma inferência *fuzzy* em um sistema não linear, com a finalidade de atuar como um controlador supervisor para determinar a melhor combinação de controladores a serem aplicados no sistema, observando suas variáveis de estado. Para isso, é desenvolvido um estudo de caso em um sistema de um pêndulo invertido.

MATERIAIS E MÉTODOS

O pêndulo invertido é um sistema não linear muito comum de ser visto durante o aprendizado da teoria de controle, pela sua capacidade de envolver diversos conceitos de elétrica, eletrônica e mecânica. Ao executar o controle, tem-se como objetivo fazer com que a haste desse pêndulo permaneça na posição desejada, contrariando o efeito da gravidade. O modelo matemático utilizado é descrito nas Equações (1) e (2), conforme (HOREVICZ, 2017).

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -19,62 \sin(x_1) - 2x_2 + 20u \quad (2)$$

De forma que $x_1(t)$ representa a posição angular, $x_2(t)$ representa a velocidade angular e $u(t)$ representa o torque aplicado à base da haste, que é o sinal de controle considerado. Para efetuar o controle desse sistema, o plano de fase foi dividido em 5 regiões, e para cada uma delas foi construído um controlador distinto que será aplicado de acordo com a posição e velocidade angulares do pêndulo. A técnica utilizada para construir esses controladores foi baseada no projeto de controle no espaço de estados (OGATA, 2010) de um sistema linearizado em torno do centro de cada região. As regiões utilizadas para construção dos controladores são delimitadas com base no plano de fase do sistema, com eixo horizontal delimitado de $-\pi$ a π . Com essa delimitação, são traçadas 5 regiões igualmente divididas no eixo de x_1 , a distância entre cada região é de $2\pi/5$.

Vale ressaltar que a divisão foi realizada dessa forma pois, de acordo com o modelo de sistema utilizado, a velocidade angular não influencia a construção dos sistemas linearizados. Logo, infere-se que para uma mesma posição, o controlador

utilizado será o mesmo. Com as regiões definidas, realiza-se a linearização desses sistemas para cada uma dessas regiões. A linearização de um sistema não linear é considerada uma aproximação linear do sistema em torno de um ponto de operação. Ao linearizar um sistema, este adota o perfil das Equações (3) e (4).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4)$$

Sendo que:

$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x_{eq}, u=u_{eq}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -19,62\cos(x_1) & -2 \end{bmatrix}_{x=x_{eq}} \quad (5)$$

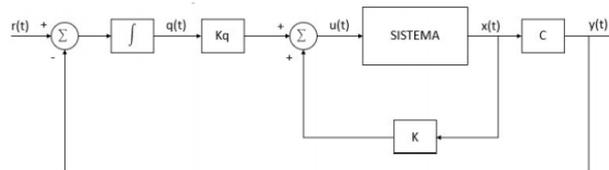
$$B = \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]_{x=x_{eq}, u=u_{eq}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}_{x=x_{eq}} \quad (6)$$

$$C = \left[\frac{\partial g}{\partial x} \right]_{x=x_{eq}, u=u_{eq}} = [1 \ 0]_{x=x_{eq}} \quad (7)$$

Esse sistema linearizado pode ser empregado na região próxima a esse ponto, conseguindo prever o comportamento real. Dessa forma, o controlador construído a partir dessa linearização será capaz de atuar no sistema não linearizado na região delimitada. Portanto, ao terminar o processo de linearização, são adquiridos 5 modelos linearizados, um para cada região delimitada.

Uma das técnicas utilizadas ao trabalhar com controle no espaço de estados é o método da alocação de polos. A estratégia de controle utilizada para este estudo de caso envolve a implementação de um integrador aplicado ao erro entre a saída $y(t)$ e a referência $r(t)$, sendo a saída do integrador denotada aqui como $q(t)$, assim como ilustra a Figura (1).

Figura 1 – Controle com integrador do erro



Fonte: Autoria Própria (2020).

Considerando que a saída do integrador $q(t)$ também é um estado do sistema do pêndulo, o sistema aumenta em uma ordem e é representado por $\tilde{x}(t)$. Com isso, adquirem-se as matrizes aumentadas \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} e \tilde{D} , apresentadas respectivamente nas Equações (8), (9), (10) e (11), e seu sistema aumentado representado na Equação (12), que vão ser utilizadas para cada uma das regiões.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -19,62\cos(x_1) & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\tilde{C} = [C \ 0] = [1 \ 0 \ 0] \quad (10)$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \tilde{A}\hat{x}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{D}r(t) \quad (12)$$

Em seguida, de acordo com a técnica de alocação de polos, determina-se os polos de malha fechada desejados (OGATA, 2010). A estratégia para essa etapa pode se alterar, dependendo do objetivo do controle e das especificações do sistema. Para a aplicação deste trabalho, os polos desejados foram determinados procurando atingir $\zeta = -0.383$ e $\omega_n = -5.227$. Com essa informação, os polos calculados são: $p_1 = -2 + 2,097i$, $p_2 = -2 - 2,097i$ e $p_3 = -10$.

Foram definidos 3 polos porque o controlador é construído a partir do sistema aumentado de ordem 3. Tendo os polos definidos, inicia-se a construção de todos os controladores. Com esse sistema, calcula-se a matriz M e com seus autovalores calcula-se o vetor \tilde{K} , utilizado no sinal de controle na Equação (14), com base nos polos desejados e nas matrizes aumentadas \tilde{A} e \tilde{B} .

$$M = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -19,62\cos(x_1) & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} [K_a \quad K_b \quad K_q] \quad (13)$$

$$u(t) = [K_a \quad K_b]x(t) + K_q q(t) \quad (14)$$

Dessa forma, essa técnica é reaplicada para cada uma das regiões e obtém-se um controlador para cada região. Com os controladores desenvolvidos, de acordo com as regiões de atuação, um sistema *fuzzy* é desenvolvido com o objetivo de analisar a entrada inicial de dados do problema de controle.

Um sistema *fuzzy* (PEDRYCZ, 1998) proporciona uma análise de dados que apresentam limites definidos de forma imprecisa, com sobreposições entre suas fronteiras, e que podem ser discretizados em intervalos linguísticos. Dessa forma, os valores de associação indicam o quanto um objeto é compatível com uma determinada característica (PEDRYCZ, 1998). Para construir um sistema *fuzzy*, é importante definir qual modelo de inferência será utilizado: o modelo Mamdani (PEDRYCZ, 1998), cuja saída é um conjunto *fuzzy*, ou o modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK) (SUGENO, 1985), cuja saída é uma função linear ou constante.

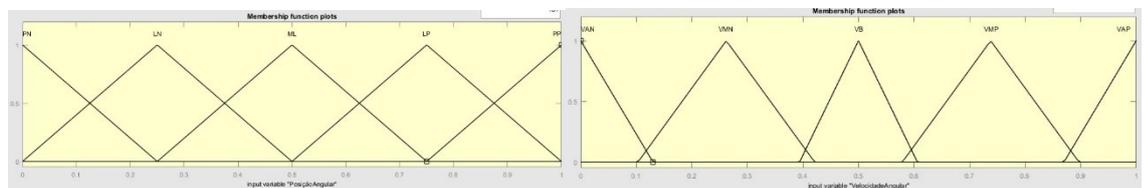
Neste trabalho, o modelo de inferência *fuzzy* utilizado é o modelo TSK (SUGENO, 1985), pois além da vantagem computacional, as saídas do sistema *fuzzy* proposto são funções constantes. Após a determinação do processo de inferência, a combinação dos diferentes controladores é feita para gerar um novo controlador K_{final} , que atue no sistema de forma que o pêndulo estabilize na posição desejada. Dessa forma, a ação de controle é calculada da seguinte forma:

$$K_{final} = \sum_{n=1}^5 C_n \tilde{K}_n \quad (16)$$

Em que C_n representa a variável de ativação do controle n e K_n representa o vetor de controle do controlador n . A partir disso, o sistema *fuzzy* com o processo de inferência Takagi-Sugeno é construído em algumas etapas, conforme a seguir (SUGENO, 1985). As entradas definidas para o sistema de inferência Fuzzy são as variáveis de estado. Portanto a Entrada 1 é definida como posição angular e a Entrada 2 é definida como velocidade angular.

A Entrada 1 foi discretizada em 5 intervalos linguísticos: Perto Negativo (PN) [0; 0,25], Longe Negativo (LN) [0; 0,5], Muito Longe [0,25; 0,75], Longe Positivo (LP) [0,50; 1] e Perto Positivo [0,75; 1]. Cada um desses intervalos equivale a uma função de pertinência de formato triangular. Já a Entrada 2 também foi dividida em 5 intervalos linguísticos: Velocidade Alta Negativa (VAN) [0; 0,13], Velocidade Média Negativa (VMN) [0,103; 0,421], Velocidade Baixa (VB) [0,394; 0,606], Velocidade Média Positiva (VMP) [0,579; 0,897] e Velocidade Alta Positiva (VAP) [0,897; 1]. Assim como na Entrada 2, esses intervalos representam as funções de pertinência, que possuem formato triangular. Suas funções de pertinência podem ser observadas na Figura 2.

Figura 2: Funções de pertinência das entradas 1 e 2



Fonte: Autoria Própria (2020).

Como saída, foram determinadas 5 variáveis, que representam o valor da variável de ativação de cada controlador, possuindo apenas uma função de pertinência com função constante igual a 1. Ao analisar a influência das entradas na determinação do controle mais adequado para cada cenário, foi levado em consideração que apenas as altas velocidades podem fazer com que o controlador mais adequado não seja o mesmo da região em que o pêndulo está posicionado. Logo, caso a Entrada 2 seja baixa ou média, utiliza-se preferencialmente o controlador da região em que a posição angular se encontra. Caso contrário, utiliza-se algum dos controladores das regiões adjacentes. Dessa forma, é determinada a base de regras *fuzzy* (PEDRYCZ, 1998), do tipo se-então, apresentada no Quadro 1. Essa base de regras é interpretada, por exemplo, da seguinte forma: se a Entrada 1 é Perto Negativo (PN) e a Entrada 2 é Velocidade Alta Negativa (VAN), então o controlador mais adequado é o Controlador 5 (C₅).

Quadro 1 – Base de Regras *Fuzzy*

Entrada 1	Entrada 2				
	VAN	VMN	VB	VMP	VAP
PN	C ₅	C ₁	C ₁	C ₁	C ₂
LN	C ₁	C ₂	C ₂	C ₂	C ₃
ML	C ₂	C ₃	C ₃	C ₃	C ₄
LP	C ₃	C ₄	C ₄	C ₄	C ₅
PP	C ₄	C ₅	C ₅	C ₅	C ₁

Fonte: Autoria própria (2020).

Para a combinação das variáveis de entrada no antecedente da base de regras linguísticas, o método E foi aplicado. Este método define como são executadas as operações lógicas definidas como T-norma (PEDRYCZ, 1998). Para este estudo de caso, assim como utilizado em (DUPONT, 2010), foi escolhido o produto das entradas, realizando-a antes de executar a T-norma.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Seguindo os procedimentos descritos anteriormente, foram construídos os 5 controladores para serem utilizados para o sistema de pêndulo invertido. Os quais estão descritos nas Equações (17), (18), (19), (20) e (21).

$$\tilde{K}_1 = [-3,401 \quad -0,6 \quad 4,1995] \quad (17)$$

$$\tilde{K}_2 = [-2,420 \quad -0,6 \quad 4,1995] \quad (18)$$

$$\tilde{K}_3 = [-1,439 \quad -0,6 \quad 4,1995] \quad (19)$$

$$\tilde{K}_4 = [-2,420 \quad -0,6 \quad 4,1995] \quad (20)$$

$$\tilde{K}_5 = [-3,401 \quad -0,6 \quad 4,1995] \quad (21)$$

Ao observar os controladores calculadores, verifica-se que $\tilde{K}_1 = \tilde{K}_5$ e $\tilde{K}_2 = \tilde{K}_4$. Isso acontece devido à característica espelhada do pêndulo invertido, fazendo com que comportamento entre 0 e π seja análogo ao do intervalo $[-\pi, 0]$. O sistema *fuzzy* proposto na seção anterior foi aplicado no problema de controle do pêndulo invertido em situações distintas, considerando a dinâmica não-linear, mostradas nas Equações (1) e (2). Dessa forma, é possível realizar uma análise de desempenho desta técnica em relação à utilização dos controladores implementados individualmente. Para executar esses testes, foi definido como tempo de simulação 15 segundos, referência igual a: $-\pi$, se $x_1 < 0$, ou π , se $x_1 \geq 0$ e 3 condições iniciais simuladas distintas. Com esses parâmetros definidos, foram definidas as entradas iniciais de cada situação e efetuadas as simulações para verificar a validade da técnica de controle desenvolvida.

- Situação 1: condição inicial $x_1(0) = 2,513$ e $x_2(0) = 1,89$

$$K_{final} = 0,4\tilde{K}_4 + 0,6\tilde{K}_5 \quad (22)$$

- Situação 2: condição inicial $x_1(0) = -0,628$ e $x_2(0) = 9,45$

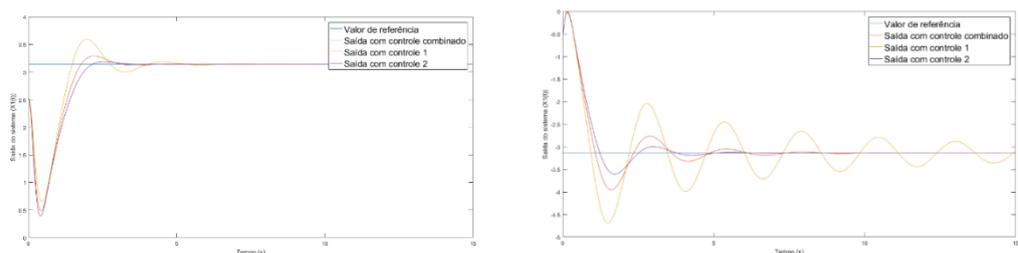
$$K_{final} = 0,4\tilde{K}_3 + 0,6\tilde{K}_4 \quad (23)$$

- Situação 3: condição inicial $x_1(0) = -1,885$ e $x_2(0) = 0,00$

$$K_{final} = 0,2\tilde{K}_1 + 0,8\tilde{K}_2 \quad (24)$$

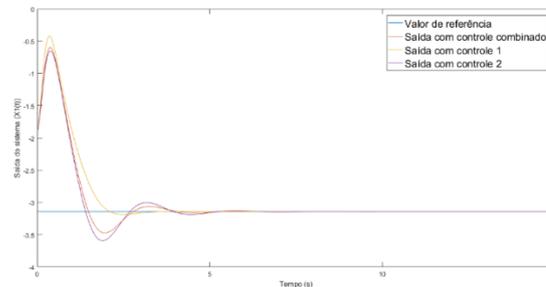
As Figuras 3 e 4 representam as saídas para cada situação.

Figura 3 – Saída das Situações 1 e 2



Fonte: Autoria Própria (2020).

Figura 4 – Saída da Situação 3



Fonte: Autoria Própria (2020).

CONCLUSÃO

Este trabalho propõe um sistema *fuzzy* para o processo de controle de um sistema não linear, agindo como um controlador supervisor que determina a combinação de controladores lineares mais adequada a ser aplicada no sistema. Com os resultados das três situações simuladas, é possível inferir que em todos os casos, o controlador combinado executa um desempenho intermediário em relação aos controladores usados separadamente. Por exemplo, na Situação 1, o *overshoot* da saída do controle combinado é maior que o constatado na saída do controlador 5 e menor que o constatado na saída do controlador 4. Ao analisar a Situação 2, é possível verificar que o controlador 3 não possui um bom desempenho quando aplicado no sistema, já que em 15 segundos não atingiu a estabilidade. Esse resultado é obtido pois o controlador foi moldado na situação mais difícil de se estabilizar. Com isso, o torque necessário para estabilizar aumenta a oscilação, demorando para alcançar a referência desejada. Dessa forma, é possível afirmar que a técnica de controle desenvolvida é capaz de suavizar a transição entre controladores e fornecer um controlador combinado que consiga ser implementado no sistema não linear. Embora não garanta que esse controlador fornecerá a melhor saída, garante que o pêndulo chegue na posição desejada. Para a continuação do desenvolvimento desse trabalho, é possível dinamizar o controle do pêndulo, alterando-o de acordo com sua posição, implementando a inferência *fuzzy* para executar essa mudança de controladores de forma suave, possibilitando um controle mais eficiente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Fundação Araucária pelo fomento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

DUPONT, F. H. **Múltiplos controladores aplicados ao conversor boost CC-CC operando com larga faixa de carga: uma abordagem baseada em algoritmo genético e lógica fuzzy**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Regional de Blumenau, Blumenau. 2010. Disponível em: https://bu.furb.br/docs/DS/2010/350508_1_1.pdf. Acesso em: 10 abr. 2020.

HOREVICZ, D. S. **Estudo da técnica ant colony learning no controle de sistemas não lineares**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio. 2017. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/3414>. Acesso em: 27 abr. 2020.

LATHI, B. P. **Sinais e sistemas lineares**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An introduction to fuzzy sets**. 1998.

SUGENO M. Industrial applications of fuzzy control. **Elsevier Science Pub. Co.**, 1985.