https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2020

Uma estratégia h-adaptativa aplicada ao método dos elementos finitos em estruturas submetidas à múltiplos casos de carregamento

h-adaptative strategy proposal for finite element method in structures imposed to multiple load cases

João Pedro Furrier Rosa Pacheco
eujppacheco@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil

João Luiz do Vale
joaovale@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil

Jéderson da Silva
jedersonsilva@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil

Recebido: 19 ago. 2020.
Aprovado: 01 out. 2020.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo propor uma estratégia h-adaptativa em estruturas submetidas a múltiplos casos de carregamentos visando avaliar e controlar os erros de discretização intrínsecos da aplicação do MEF. Tal estratégia consiste em um processo iterativo onde, inicialmente, ocorre para cada um dos casos de carregamento a estimativa dos erros e a definição do tamanho elementar. Na sequência, uma nova malha é gerada a partir do gerador de malhas BAMG. Este processo é repetido até que o erro relativo global em energia esteja abaixo de um erro previamente estipulado. Para a avaliação dos erros de discretização é utilizado um estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação de tensões. A definição da nova malha de elementos finitos é conduzida por duas técnicas h-adaptativas, bem postas na literatura e aqui denominadas Ch^P e LB. Os resultados obtidos mostram que a estratégia h-adaptativa proposta resulta em uma malha onde, para todos os carregamentos, o erro relativo global encontra-se abaixo do erro admissível. Quanto a comparação das técnicas h-adaptativas, a técnica LB apresenta uma menor variação no número de elementos entre as iterações, conduzindo a um processo mais estável e com malhas que possuem melhores parâmetros de qualidade locais e globais.

PALAVRAS-CHAVE: Método dos Elementos Finitos. h-adaptatividade. Estimadores de erro a posteriori. Múltiplos Carregamentos.

ABSTRACT

This work aims to propose an h-adaptive strategy in structures subjected to multiple load cases in order to evaluate and control the intrinsic discretization errors of the application of the FEM. Such a strategy consists of an iterative process where, initially, the estimation of errors and the definition of the elementary size occur for each loading case. Afterwards, a new mesh is generated from the BAMG mesh generator. This process is repeated until the relative global error in energy is below an error previously stipulated. For the evaluation of discretization errors, *a posteriori* error estimator based on stress recovery is used. The definition of the new finite element mesh is driven by two h-adaptive techniques, well placed in the literature and here called Ch^P and LB. The results obtained show that the proposed h-adaptive strategy results in a mesh where, for all loads, the global relative error is below the allowable error. As for the comparison of the h-adaptive techniques, the LB technique presents a smaller variation in the number of elements between the iterations, leading to a more stable process and with meshes that have better local and global quality parameters.

KEYWORDS: Finite Element Method. h-adaptivity. A posteriori error estimators. Multiple Loads.

INTRODUÇÃO

A qualidade de uma solução encontrada através do Método dos Elementos Finitos (MEF) está diretamente ligada a capacidade com a qual é possível mitigar e controlar os erros oriundos de sua aplicação. No âmbito dos erros de aproximação, mais especificamente os estimadores de erros *a posteriori,* pode-se diferenciá-los entre os que são baseados em resíduo e os que são baseados em recuperação (ZIENKIEWICZ et al., 1999). Dentre os métodos de recuperação dos gradientes, vale destacar o método SPR (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992a, 1992b), o qual é baseado no processamento dos valores de tensões aproximadas considerando um conjunto de pontos superconvergentes pertencentes a padrões de elementos na vizinhança de um nó. Zienkiewicz e Zhu (1987) foram uns dos pioneiros no estudo e desenvolvimento de técnicas h-adaptativas. A estratégia de refino h isotrópica proposta pelos autores, permite obter diretamente o tamanho de cada elemento a partir de um erro admissível previamente fornecido. Li e Bettes (1995) baseando-se na técnica proposta por Zienkiewicz e Zhu (1987), desenvolveram uma metodologia capaz de dimensionar os novos tamanhos dos elementos a partir do erro corrente na malha e do cálculo do número de elementos necessários para a malha adaptada, de modo que os critérios de convergência fossem atendidos.

Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo propor uma estratégia h-adaptativa em estruturas submetidas à múltiplos carregamentos. A definição da nova malha de elementos finitos é conduzida a partir de duas técnicas h-adaptativas fundamentadas na equidistribuição do erro em energia: Ch^p proposta por Zienkiewicz e Zhu (1987), e LB proposta por Li e Bettes (1995). Ambas as técnicas são comparadas através de parâmetros de qualidade de malha locais e globais.

METODOLOGIA

Matematicamente, pode-se definir o erro de discretização como a diferença entre a solução exata ($\boldsymbol{u}$) e a solução aproximada obtida através do MEF ($\boldsymbol{u}^{MEF}$). Em termos de um campo vetorial, Zienkiewicz e Zhu (1987) definem a função erro como sendo $\boldsymbol{e}_u = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{MEF}$. Por se tratar de um problema de elasticidade linear, o presente trabalho utiliza a norma do erro em energia ($\|\boldsymbol{e}\|$) dada por (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987)

$$\|\boldsymbol{e}\| = \left[\int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{MEF} \right)^T \mathbf{D}^{-1} \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{MEF} \right) \mathbf{d}\Omega \right]^{1/2}, \tag{1}$$

onde Ω é o domínio do problema, $\boldsymbol{\sigma}$ é o campo de tensões analítico atrelado a diferenciação da solução exata $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\sigma}^{MEF}$ é o campo de tensões aproximado, obtido via MEF e $\mathbf{D}$ é o tensor constitutivo do material. A representação do erro absoluto em energia através de uma medida relativa é conhecida como erro relativo percentual em energia η , e pode ser escrito da forma (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987)

$$\eta = \frac{\|\boldsymbol{e}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} 100\%, \quad \text{com} \quad \|\boldsymbol{e}\| = \left(\sum_{el=1}^{Nel} \|\boldsymbol{e}\|_{el}^2 \right)^{1/2}, \tag{2}$$

sendo Nel o número total de elementos presentes na malha analisada, $\|\boldsymbol{u}\|$ a energia total acumulada no sistema, $\|\boldsymbol{e}\|$ a norma do erro global e $\|\boldsymbol{e}\|_{el}$ a norma do erro em energia associada a cada elemento *el* da malha. Em muitos casos a solução analítica $\boldsymbol{\sigma}$ (Eq. ((1)) não é conhecida, portanto pode-se utilizar uma solução recuperada ou suavizada oriunda do pós-processamento da solução obtida via MEF.

A formulação proposta por Zienkiewicz e Zhu (1987) considera um pós-processamento das tensões obtidas por elementos finitos fornecendo uma solução recuperada com uma maior taxa de convergência. Deste modo, a norma do erro em energia pode ser obtida simplesmente pela substituição da solução analítica $\boldsymbol{\sigma}$, pela solução recuperada, $\boldsymbol{\sigma}^*$, na Eq. (1), ou seja

$$\left\|\boldsymbol{e}^*\right\| = \left[\int_{\Omega}\left(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^{MEF}\right)^T \boldsymbol{D}^{-1}\left(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^{MEF}\right)\boldsymbol{d}\Omega\right]^{1/2}. \tag{3}$$

São brevemente descritas duas técnicas h-adaptativas presentes na literatura, aqui denominadas Ch^p (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987) e LB (LI; BETTES, 1995). Ambas as técnicas buscam uma malha com o erro distribuído igualmente entre todos os elementos do domínio. E ainda considera-se uma malha convergente aquela em que o erro relativo global (η) é menor ou igual ao erro percentual admissível para a solução ($\bar{\eta}$). Segundo Li *et al.* (1995) a principal diferença entre as duas técnicas é o fato de que Ch^p depende do número de elementos da malha corrente, enquanto LB propõe uma distribuição de erro baseado no número de elementos da malha futura.

A técnica Ch^p estima que o novo tamanho dos elementos, h_{new}, desconsiderando a presença de singularidades, é calculado por (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987)

$$h_{new} = \frac{h_{old}}{\xi_{el}^{1/p}}, \quad \text{com} \quad \xi_{el} = \frac{\|\boldsymbol{e}\|_{el}}{\bar{e}}, \text{ onde } \bar{e} = \bar{\eta}\left(\frac{\|\boldsymbol{u}\|^2}{Nel}\right)^{1/2} \equiv \bar{\eta}\left(\frac{\left\|\boldsymbol{u}^{MEF}\right\|^2 + \left\|\boldsymbol{e}^*\right\|^2}{Nel}\right)^{1/2}, \tag{4}$$

onde h_{old} é o tamanho do elemento corrente, *p* o grau polinomial da aproximação de elementos finitos e $\bar{e}$ é o erro limite admissível por elemento. Ademais, $\left\|\boldsymbol{u}^{MEF}\right\|$ é a norma em energia global da solução aproximada via MEF e ξ_{el} é um parâmetro de refino elementar que indica se o elemento irá sofrer um refinamento ($\xi_{el} > 1$) ou desrefinamento ($\xi_{el} < 1$).

A técnica LB, por sua vez, determina que o tamanho dos novos elementos pode ser escrito como

$$h_{new} = h_{old}\left(\frac{\bar{\eta}\|\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{e}\|_{el}\sqrt{Nel_{new}}}\right)^{\frac{1}{\left(p+\left(d/2\right)\right)}}, \quad \text{com} \quad \|\boldsymbol{u}\| \approx \left(\left\|\boldsymbol{u}^{MEF}\right\|^2 + \left\|\boldsymbol{e}^*\right\|^2\right)^{1/2}, \tag{5}$$

onde *d* é a dimensão física do problema (neste caso, *d* = 2) e Nel_{new} é número de elementos da nova malha, o qual pode ser calculado segundo (DÍEZ; HUERTA, 1999)

$$Nel_{new} = \left(\bar{\eta}\|\boldsymbol{u}\|\right)^{-d/p}\left(\sum_{el=1}^{Nel}\left(\|\boldsymbol{e}\|_{el}\right)^{d/(p+d/2)}\right)^{(p+d/2)/p} . \tag{6}$$

A fim de comparar e avaliar as técnicas h-adaptativas, o corrente trabalho utiliza os parâmetros de qualidade de malha apresentados por Silva (2015) fundamentados no trabalho de Oñate e Bugeda (1993), sendo eles: máximo valor do parâmetro de erro local elementar $(\xi_{máx})$, média simples dos valores de erro local elementar $(\xi_{méd})$ e o desvio do parâmetro de erro local elementar (D_ξ). Dessa forma, define-se D_ξ, $\xi_{méd}$ e $\xi_{máx}$, respectivamente, como (SILVA, 2015)

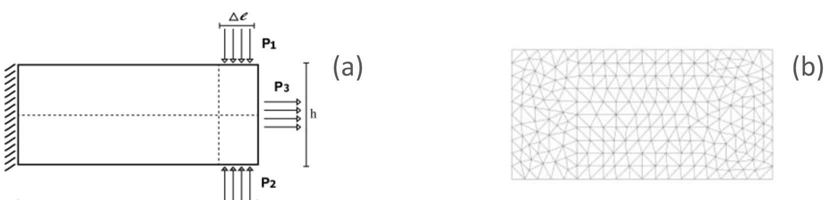
$$D_\xi = \sqrt{\frac{1}{Nel}\sum_{el=1}^{Nel}\left(\xi_{el}-1\right)^2} \ , \ \xi_{méd} = \frac{1}{Nel}\sum_{el=1}^{Nel}\xi_{el} \ \text{ e } \ \xi_{máx} = máx\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{Nel}\right) . \tag{7}$$

Em uma malha ideal espera-se que $D_\xi = 0$, $\xi_{méd} = \xi_{máx} = 1$.

O processo h-adaptativo para vários casos de carregamento por sua vez, parte de um processo iterativo onde, inicialmente, é avaliado o deslocamento para cada um dos casos de carregamento. Para cada caso, recupera-se a tensão utilizando a técnica SPR e ocorre a estimativa dos erros e a definição do tamanho de cada elemento. Na sequência, é conduzido um processo de intersecção das malhas de parâmetros resultantes e uma nova malha é formada através da utilização do gerador de malhas BAMG (*Bidimensional Anisotropic Mesh Generator*) (Hecht, 1998). Este processo é repetido até que o erro relativo global em energia para uma dada malha considerando todos os carregamentos separadamente esteja abaixo de um erro previamente estipulado.

Para a implementação da estratégia é utilizada uma viga engastada em sua extremidade esquerda sujeita a três carregamentos de valor 1kN cada, aplicados em regiões distintas, como ilustra a Figura 1(a). Os parâmetros do modelo são dados por: L = 2 m, h = 1 m, $\Delta \ell$ = 0,20m e 30 mm de espessura. Ademais, considera-se um módulo de elasticidade de 200GPa e um coeficiente de Poisson de 0,3. Devido à similaridade dos resultados P1 e P2 optou-se por apresentar somente os resultados para P1. Visando alcançar um erro relativo percentual admissível de 5% em toda a malha o processo proposto realiza três iterações adaptativas para cada metodologia.

Figura 1: (a) Viga engastada sobre efeito de múltiplos carregamentos. (b) Domínio inicial discretizado.



η_{P1} = 16,01% η_{P3} = 19,90% Nel = 442

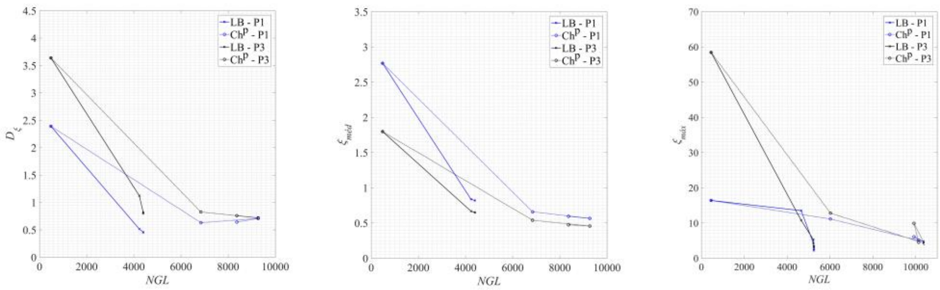
Fonte: O autor (2020)

RESULTADOS

A Figura 3 apresenta as malhas geradas pelo processo. Embora ambas as projeções alcancem o valor do erro relativo percentual admissível de 5% fica evidente na Figura 2 a superioridade da metodologia proposta por Li e Bettes (1995), uma vez que esta possui parâmetros de qualidade mais próximos do ideal, quando comparado com a técnica proposta por Zienkiewicz e Zhu (1987) e ainda utilizando um número de elementos muito menor.

Outrossim, ao observar a Figura 3 nota-se um fenômeno já apresentado na literatura nos trabalhos de Oñate e Bugeda (1993). A técnica Ch^p apresenta uma característica oscilatória das malhas geradas, ou seja, refino-desrefino-refino. Isso faz com que a nível elementar a distribuição igualitária dos erros seja dificultada.

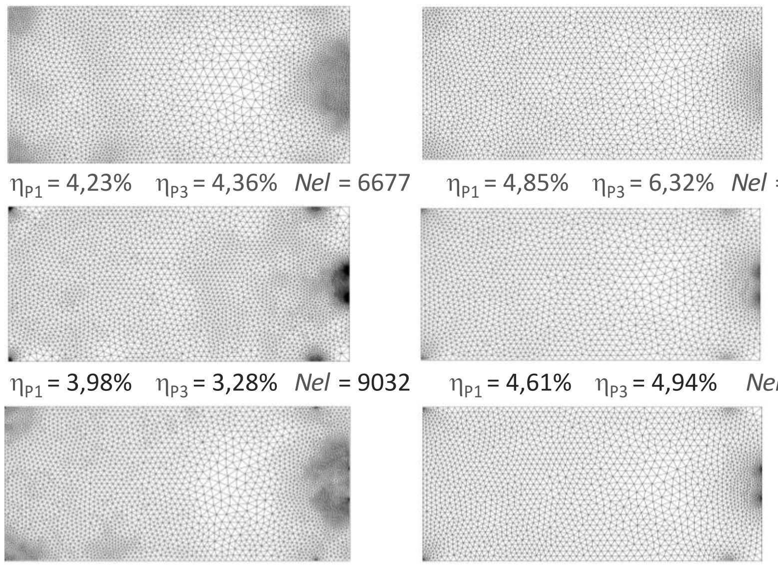
Figura 2: Parâmetros de qualidade da malha: (a) NGL x D_ξ .(b) NGL x $\xi_{méd}$.(c) NGL x $\xi_{máx}$.



(a) (b) (c)

Fonte: O autor (2020).

Figura 3: Malha de elementos finitos. (a) Projeção Ch^p . (b) Projeção LB



(a) (b)

Fonte: O autor (2020)

CONCLUSÃO

O presente trabalho apresenta uma formulação de problemas de h-adaptatividade para estruturas sujeitas a múltiplos casos de carregamento e realiza uma avaliação e controle dos erros de discretização oriundos da aplicação do MEF; além de uma comparação entre duas técnicas h-adaptativas fundamentadas na equidistribuição do erro em energia. Com isso, pôde-se concluir que:

- Ao aplicar-se a projeção LB, a malha gerada apresentou uma qualidade superior, com uma distribuição dos erros ao longo da malha de forma mais uniforme apresentando um desvio menor e uma média mais próxima da unidade, quando comparada com a projeção Ch^p. E ainda a projeção elementar LB se mostrou mais estável, e consideravelmente mais eficiente quando verificado os parâmetros de qualidade globais e elementares das malhas geradas;

- Além disso, deve-se observar uma vantagem da estratégia proposta no que diz respeito à definição de uma malha única que garanta os critérios de convergência para todas as cargas aplicadas. Assim, o custo computacional é reduzido, pois a montagem da matriz de rigidez é realizada apenas uma vez. Dessa forma, a metodologia proposta se mostrou muito eficiente em controlar os erros de discretização em problemas de elasticidade envolvendo múltiplos carregamentos.

AGRADECIMENTOS

O autor gostaria de agradecer a Fundação Araucária por fornecer a bolsa de estudos.

REFERÊNCIAS

DIEZ; P. HUERTA, A. **Unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptivity.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 176, 215-299, 1999.

HECHT, F. **BAMG: Bidimensional anisotropic mesh generator**, 1998. Disponível em: <http://www.freefem.org/>. Acesso em: 11 de fev. de 2020.

LI, L.-Y.; BETTESS, P. **Notes on mesh optimal criteria in adaptive finite element computations**. Communications in Numerical Methods in Engineering. 11(11), 911–915, 1995.

LI, L.-Y.; BETTESS, P.; BULL, J.W.; BOND, T.; APPLEGARTH, I. **Theoretical formulations for adaptive finite element computations**. Communications in Numerical Methods in Engineering. 11(10), 857–868, 1995.

OÑATE, E., & BUGEDA, G. **A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis**. Engineering Computations, vol. 10, pp. 307–321, 1993.

REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. 3. ed., Mc Graw Hill, 2006.

SILVA, J. **Análise de estimadores de erro a posteriori aplicados ao método dos elementos finitos utilizando refino h-adaptativo**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

ZIENKIEWICZ, O. C., BOROOMAND, B., & ZHU, J. Z. **Recovery procedures in error estimation and adaptivity Part I: Adaptivity in linear problems**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 176, pp. 111–125, 1999.

ZIENKIEWICZ, O. C., & ZHU, J. Z. **A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, pp. 337–357, 1987.

ZIENKIEWICZ, O. C., & ZHU, J. Z. **The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pp. 1331–1364, 1992a.

ZIENKIEWICZ, O. C., & ZHU, J. Z. **The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pp.1365–1382, 1992b.