https://eventos.utfpr.edu.br//sicite/sicite2020

Estudo de dinâmica não linear e caos em sistemas de tempo contínuo: Dinâmica dos sistemas de Lorenz e Rössler

Study of nonlinear dynamics and chaos in continuous time systems: Dynamics of Lorenz and Rössler systems

Henry Otavio Fontana
henryfontana@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Paraná, Brasil.

Vinicius Piccirillo
piccirillo@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Paraná, Brasil.

Thiago Gilberto do Prado
thiagoprado@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Paraná, Brasil.

Recebido: 19 ago. 2020.
Aprovado: 01 out. 2020.

RESUMO

Em diversos casos, a não linearidade é a responsável pelo surgimento dos comportamentos complexos e imprevisíveis nos sistemas dinâmicos. Um dos comportamentos complexos mais surpreendente que se encontra dentro dos estudos de dinâmica não linear é o caos, o qual está relacionado com a alta imprevisibilidade observada em certas dinâmicas oscilatórias. Assim o objetivo da pesquisa é predizer como esses sistemas vão evoluir com o progresso do tempo e quais comportamentos eles pode apresentar para determinadas condições. No estudo realizado os sistemas de Lorenz e Rösller tridimensional foram explorados numericamente. Os resultados obtidos a partir das simulações possibilitaram a realização de uma análise geral dos fenômenos dinâmicos encontrados. Ao longo do trabalho foi mostrado como ocorrem mudanças na dinâmica e na estabilidade dos sistemas quando determinado parâmetro de controle é variado influenciando no surgimento de comportamento caótico. Os comportamentos dinâmicos, tanto periódicos quanto caóticos, encontrados foram estudados e caracterizados analisando a evolução temporal dos sistemas, espaço de fases, diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov.

PALAVRAS-CHAVE: Dinâmica. Fenômenos. Comportamento.

ABSTRACT

In several cases, non-linearity is responsible for the appearance of complex and unpredictable behaviors in dynamic systems. One of the most surprising complex behaviors found in studies of nonlinear dynamics is chaos, which is related to the high unpredictability observed in certain oscillatory dynamics. So the objective of the research is to predict how these systems will evolve over time and what behaviors they can exhibit under certain conditions. In the study carried out, the Lorenz and three-dimensional Rösller systems were explored numerically. The results obtained from the simulations made it possible to carry out a general analysis of the dynamic phenomena found. Throughout the work it was shown how changes in the dynamics and stability of systems occur when a given control parameter is varied, influencing the appearance of chaotic behavior. The dynamic behaviors, both periodic and chaotic, found were studied and characterized by analyzing the temporal evolution of the systems, phase space, bifurcation diagrams and Lyapunov exponents.

KEYWORDS: Dynamics. Phenomena. Behavior.

4 EDUCAÇÃO DE QUALIDADE

INTRODUÇÃO

Em diversos casos, a não linearidade é a responsável pelo surgimento dos comportamentos complexos e imprevisíveis nos sistemas dinâmicos. Estes comportamentos têm sido foco de estudos nas últimas décadas, uma vez que eles permitem explicar fenômenos e situações que podem parecer contra intuitivos e aleatórios. Um dos comportamentos complexos mais interessante que se encontra dentro dos estudos de dinâmica não linear é o caos. O caos é um comportamento relacionado com a alta imprevisibilidade observada em certas dinâmicas oscilatórias, existindo uma teoria vinculada a este comportamento conhecida como Teoria do Caos (HOFF, 2014, p. 20). Essa teoria fala sobre a existência de sistemas dinâmicos que são extremadamente sensíveis a mudanças nas condições iniciais; ou seja, uma pequena mudança sobre uma condição inicial pode modificar a dinâmica futura em grande medida, sendo que o resultado obtido se encontra totalmente distante do previsto inicialmente. Essa propriedade divergente, característica do comportamento caótico, tem sido foco de discussões em torno da natureza determinista de alguns fenômenos (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996).

Os parâmetros de sistemas dinâmicos determinísticos desempenham uma importante função especificando as transições entre comportamento caótico e periódico. Esta influência dos parâmetros na transição do atrator pode ser analisada e representada em diagramas de bifurcação (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). O expoente de Lyapunov caracteriza os diferentes comportamentos que o sistema pode apresentar (equilíbrio, ciclo limite, caos) (WOLF, 1985). A combinação de diferentes técnicas dá uma ideia da evolução do sistema em termos dos parâmetros e das diferentes rotas para o caos.

MATERIAL E MÉTODOS

Para a investigação dos modelos foi realizado a integração numérica e simulações dos sistemas, incluindo computação dos expoentes de Lyapunov e características dimensionais e espectrais. A pesquisa possui natureza exploratória com finalidade de analisar a existência dos mais variados comportamentos que esses sistemas apresentam, bem como a condição de regime caótico, partindo de uma revisão bibliográfica composta por autores da área.

Partindo dos conceitos apresentados por esses autores, será feito uso do software interativo MATLAB de alta performance voltado para o cálculo numérico, para obter novos resultados e comparar resultados já presentes na literatura. Inicialmente foi simulado a evolução do sistema com o tempo em um intervalo [0 5000] utilizando a rotina ode45 e também métodos numéricos para solucionar as equações diferenciais, e assim, construído o espaço de fases, em seguida Diagramas de Bifurcação e Expoentes de Lyapunov, estes dois últimos gráficos foram feitos com 1000 valores do parâmetro de controle. Portanto, os resultados da pesquisa serão expressos a partir desses gráficos e discutidos em cima deles.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O modelo de Lorenz é altamente idealizado de convecções de um fluido, configurando uma corrente no sentido horário ou anti-horário. O número de

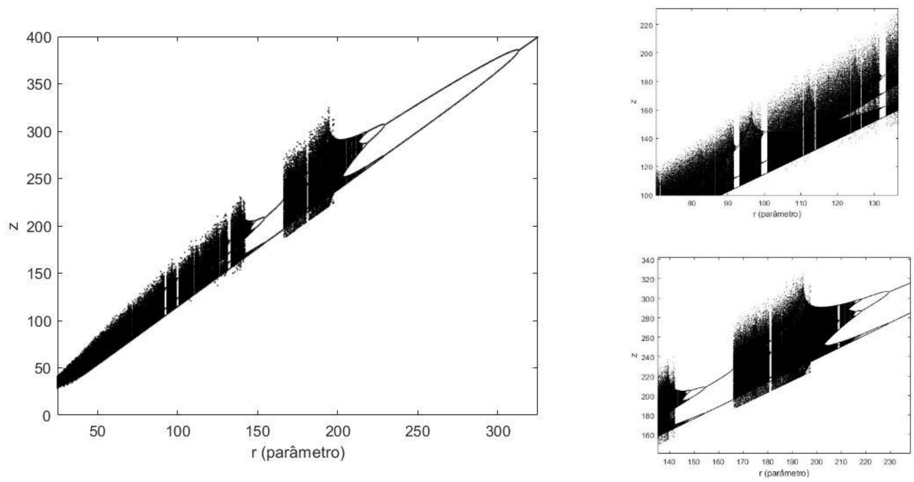
Prandtl (σ), o número de Rayleigh r e b são parâmetros do sistema. A variável x é proporcional à velocidade do fluxo do fluido circulatório. Se $x > 0$, o fluido circula no sentido horário enquanto $x < 0$ significa que o fluxo ocorre no sentido anti-horário. A largura dos rolos de fluxo é proporcional ao parâmetro b. A variável y é proporcional à diferença de temperatura entre os elementos fluidos ascendente e fluidos descendente e z é proporcional à distorção do perfil vertical da temperatura em relação ao seu equilíbrio (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996).

O sistema simplificado de Lorenz é constituído de três equações diferenciais não lineares:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \tag{1}$$

Para nossa análise faremos r o parâmetro variável, enquanto σ e b permanecerão com os valores constantes. Para valores altos de r existe órbitas periódicas estáveis, enquanto que para valores mais baixos existe órbitas caóticas. Esta variedade de comportamentos pode ser visualizada e predita pelo diagrama de bifurcação na figura 1.

Figura 1 – Diagrama de Bifurcação para o sistema de Lorenz

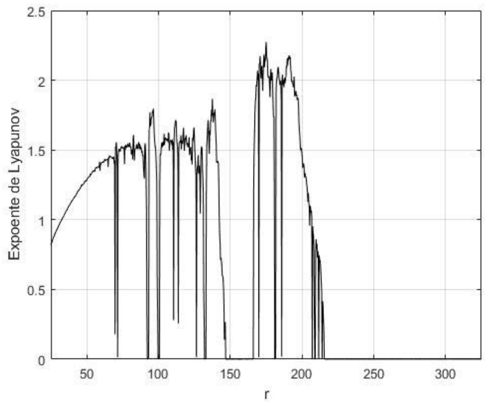


Fonte: Alligood (1996); Autoria própria (2019).

À medida que diminui-se o valor do parâmetro de r=325 percebe-se a ocorrência de um ponto de bifurcação de duplicação de período resultando em um atrator de loop duplo. Diminuindo-se ainda mais o valor do parâmetro é notável uma outra duplicação de período do atrator de loop duplo originando um atrator de loop quadruplo. Os múltiplos processos de duplicação de período implicam na presença de uma rota para o Caos via duplicação de período.

Além da dinâmica caótica do sistema, vários novos efeitos interessantes emergem a partir do diagrama de bifurcação: As regiões de janelas de estabilidade. As regiões de janelas de estabilidade é caracterizado pela presença de regiões periódicas entre regiões caóticas. Esse fenômeno pode ser observado diminuindo ainda mais o valor do parâmetro de controle. Também verifica-se o fenômeno chamado crise no diagrama de bifurcação, onde o comportamento caótico desaparece ou surge de forma abrupta, apenas com uma pequena variação no parâmetro.

Figura 2 –Maior expoente de Lyapunov para o sistema de Lorenz



Fonte: Autoria própria (2019).

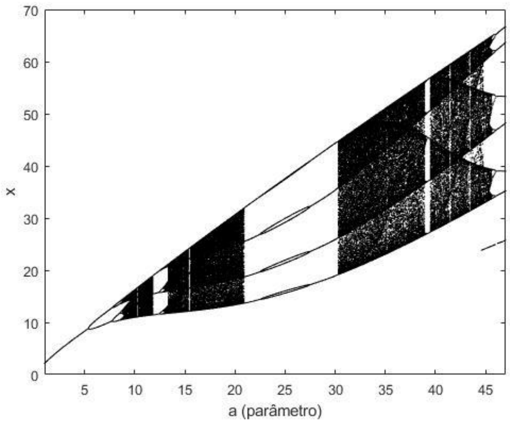
Analisando o gráfico do expoente de Lyapunov na figura 2 é possível verificar a ocorrência de Caos quando estes assumem valores positivos. Regiões de janelas de estabilidade ocorrem quando o expoente de Lyapunov cai rapidamente para zero e volta a ser positivo. Assim é possível diferenciar o comportamento caótico, quando o maior expoente de Lyapunov é positivo, de quando este é periódico, o maior expoente de Lyapunov é nulo.

O mesmo estudo foi realizado com o sistema de Rössler. As equações que definem esse sistema são:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + cy \\ \dfrac{dz}{dt} = b + (x - a).z \end{cases} \qquad (2)$$

A Figura 3 mostra o diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler. Os parâmetros b e c são fixados enquanto o parâmetro *a* é variado. Analisando o diagrama de bifurcação da esquerda para a direita verificamos a existência de uma órbita de período-1 e quando o valor do parâmetro de controle é aumentado esse ramo sofre uma bifurcação do tipo duplicação de período implicando no surgimento de órbitas de período-2. Aumentando-se ainda mais o parâmetro os ramos resultantes sofrem incontáveis duplicações de período, verificamos a presença de uma cascata de duplicação de período que resulta em Caos.

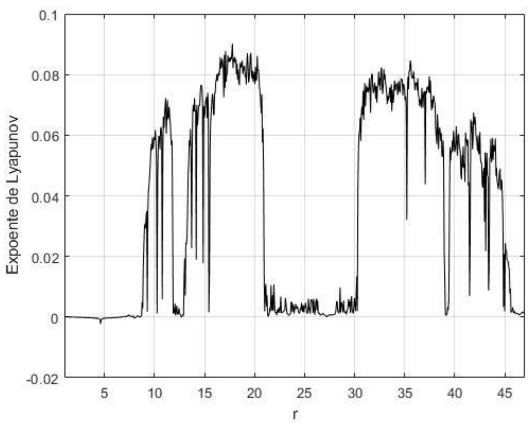
Figura 3 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler



Fonte: Alligood (1996); Autoria própria (2019).

O regime caótico é seguido por uma janela de período-3. Essa janela dobra de período até gerar novamente uma faixa de parâmetros em que o comportamento do sistema é caótico. Um comportamento interessante ocorre no centro do diagrama, os atratores de período-4 duplicam parcialmente, ou seja, dos 4 ramos apenas três deles sofrem uma bifurcação do tipo duplicação de período.

Figura 4 –Maior expoente de Lyapunov para o sistema de Rössler



Fonte: Autoria própria (2019).

Com base na análise dos expoentes de Lyapunov na figura 4 podemos verificar, analisando da esquerda para a direita, que o comportamento é periódico. O primeiro expoente de Lyapunov começa a tomar valores cada vez maiores e positivos indicando caos, o que está de acordo com o diagrama de bifurcação. O expoente de Lyapunov também indica regiões de estabilidade entre regiões caóticas, as janelas de estabilidade.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi constatada a complexidade inerente de sistemas dinâmicos de tempo contínuo por intermédio de um estudo teórico detalhado sobre a dinâmica dos sistemas de Lorenz e Rössler tridimensional. As simulações mostraram que o comportamento não linear pode implicar em uma gama muito diversificada de comportamentos para esses sistemas que inclui estados de oscilações periódicas e caos.

A combinação dos métodos numéricos e ferramentas utilizadas mostrou-se eficiente na caracterização dos possíveis comportamentos que os sistemas apresentam, sendo possível a utilização destes na análise de outros sistemas dinâmicos de tempo contínuos. Foi possível identificar as regiões de caos dos sistemas, as rotas para o caos, e como são formadas as regiões periódicas imersas em regiões caóticas - janelas de estabilidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores Vinicius Piccirillo e Thiago Gilberto do Prado pela orientação e boa disposição de estarem presente a todo instante no desenvolvimento do trabalho. Agradeço à UTFPR pela oportunidade de desenvolver esse trabalho de iniciação científica. E por fim, agradeço à Fundação Araucária pelo financiamento do trabalho.

REFERÊNCIAS

ALLIGOOD, K. T., SAUER, T. D., YORKE, J. A.,1996, ***Chaos – An introduction to Dynamical Systems***. 1 ed. Velarg New York, Springer.

HOFF, A. (2014). **ESTRUTURAS DE BIFURCAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS QUADRIDIMENSIONAIS**. Dissertação, UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC, CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT. Disponível em: https://www.udesc.br/arquivos/cct/id_cpmenu/877/anderson_hoff_15162076430114_877.pdf. Acesso em: 26 março. 2020.

WOLF, A. et al. ***Determining Lyapunov exponents from a time series***. Physica D, v. 16, p. 285, 1985.