

## Projeto de controlador fuzzy Takagi-Sugeno via LMIs para indivíduos paraplégicos

## Design of fuzzy Takagi-Sugeno controller via LMIs for paraplegic individuals

### RESUMO

Este artigo aborda a questão de modelagem e controle de indivíduos paraplégicos mantidos em pé por meio de estímulos elétricos. Por se tratar de um sistema não-linear, a problemática é tratada por meio da técnica *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS) e projeto do sistema de controle via desigualdades matriciais lineares (LMIs). Resultados obtidos confirmam a eficiência da técnica *fuzzy* TS para descrição de um sistema não-linear e a proposta de controle mostra-se adequada para atender requisitos de performance nos períodos transitório e estacionário. Além disso, o artigo contribui ao estado da arte em uma aplicação de interesse social na área de reabilitação.

**PALAVRAS-CHAVE:** Modelagem. Sistema não-linear. Desigualdade matricial linear. Estimulação elétrica. Paraplégico.

### ABSTRACT

This article addresses the dynamic systems' modeling and control of paraplegic individuals electrically stimulated. Because it is a non-linear system, the problem is solved by the fuzzy Takagi-Sugeno (TS) technique and the control system design via linear matrix inequalities (LMIs). The obtained results confirm the efficiency of the fuzzy TS technique to design a non-linear system and the control proposal proves to be suitable to meet the performance requirements on transition and stationary periods. Furthermore, the paper adds to the state of art in an application of social interest in the rehabilitation area.

**KEYWORDS:** Modeling. Nonlinear system. Linear matrix inequality. Electrical stimulation. Paraplegic.

Gabriel Simões de Gouvêa

[simas.simoese@hotmail.com](mailto:simas.simoese@hotmail.com)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil.

Willian Ricardo Bispo Murbak Nunes

[willianr@utfpr.edu.br](mailto:willianr@utfpr.edu.br)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil.

**Recebido:** 19 ago. 2020.

**Aprovado:** 01 out. 2020.

**Direito autoral:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

Ficar em pé pode ser uma tarefa simples para indivíduos hígidos, mas se torna complexa e desafiadora para indivíduos paraplégicos. Uma forma de lidar com este problema é utilizando estimulação elétrica. A dinâmica do sistema é não linear e instável. Neste sentido, faz-se necessário utilizar técnicas de controle moderno para garantir a estabilidade do sistema, superando limitações do controle clássico.

Em 1985, Takagi e Sugeno trouxeram uma contribuição significativa para modelagem e controle de sistemas (TAKAGI; SUGENO, 1985), evidenciado em diferentes aplicações, tais como: direção de veículos autônomos, controle de nível de dois tanques acoplados, controle de poluição em túneis (GOMIDE; GUDWIN; TANSCHKEIT, 1995) e na área de inteligência artificial (MARRO *et al.*, 2010).

Assim, este artigo aborda a modelagem *fuzzy* TS para aplicação de manter indivíduos paraplégicos em pé por meio de estímulos elétricos. Esta problemática pode ser assumida como semelhante ao do pêndulo invertido, visando manter o equilíbrio do sistema em torno de um ponto de operação desejado. Obviamente, a diferença reside na dinâmica do sistema e os sinais de atuação. Por meio da abordagem *fuzzy* Takagi-Sugeno propõe-se a síntese de um controlador PDC para o sistema operar em malha fechada, garantindo a estabilidade e outros critérios desejados para o sistema.

## METODOLOGIA

### Modelagem *fuzzy* Takagi-Sugeno

A lógica *fuzzy* TS permite a análise de sistemas não-lineares através da representação de uma combinação de modelos lineares locais lineares e invariantes no tempo.

A modelagem *fuzzy* TS é descrito por regras SE-ENTÃO, tal que:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } z_2(t) \text{ é } M_2^i \cdots \text{ E } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ & \text{ENTÃO } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $i = 1, 2, 3, \dots, r$ ,  $r$  é número de regras de modelo,  $M_j^i$  é o  $j$ -ésimo conjunto *fuzzy* relacionado a  $i$ -ésima regra,  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)$  são as variáveis premisas que podem ser funções das variáveis de estados. Adotando, por conveniência,  $z(t) = x(t)$ , onde  $x(t)$  é o vetor de estado do sistema não-linear. A saída defuzzificada do sistema é obtida pelo método do centro de gravidade (TANIGUCHI *et al.*, 2001), tem-se que

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (2)$$

em que a função de pertinência de cada  $i$ -ésimo modelo local é dada por  $\alpha_i(z(t)) = \frac{w^i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))} \forall i = 1, 2, \dots, r, \alpha_i(z(t)) \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1$ .

O número de modelos locais - obtidos a partir dos valores máximos e mínimos das funções não lineares do sistema - é dado por  $2^s$ , onde  $s$  é número de não-linearidades do sistema (TANIGUCHI *et al.*, 2001). Para obter os modelos locais, considera-se que  $\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^m g_{ik}(x(t))u_k(t)$ , tal que

$i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m, n$  é o número de estados,  $m$  é o número de entradas, e  $f_{ij}(x(t))$  e  $g_{ik}(x(t))$  são funções não-lineares dependentes dos estados do sistema. Para a forma generalizada, tem-se para os modelos locais  $a_{ij1} = \max_{x(t)}[\tilde{f}_{ij}(x(t))]$ ,  $a_{ij2} = \min_{x(t)}[\tilde{f}_{ij}(x(t))]$ ,  $b_{ik1} = \max_{x(t)}[\tilde{g}_{ik}(x(t))]$ ,  $b_{ik2} = \min_{x(t)}[\tilde{g}_{ik}(x(t))]$ .

### Reguladores com modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno

Assim, para o modelo (1), onde  $i = 1, 2, \dots, r$ , tem-se a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i: \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } z_2(t) \text{ é } M_2^i \cdots \text{ E } z_p(t) \text{ é } M_p^i \\ & \text{ENTÃO } u(t) = -F_i x(t), \end{aligned} \quad (3)$$

logo, o controlador é dado por  $u(t) = -\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) F_i x(t) = -F(\alpha)x(t)$ , substituindo em (3) obtém-se

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) (A_i - B_i F_j) x(t). \quad (4)$$

### Lema 1: Estabilidade

O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema de controle *fuzzy* contínuo no tempo dado em (2) é globalmente assintoticamente estável, se existirem uma matriz simétrica definida positiva  $X \in \mathbb{R}^{n \times n} (X > 0)$  e matrizes  $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tais que para todo  $i, j \in \mathbb{K}_r$ , as seguintes LMIs sejam factíveis:

$$-X A_i^T - A_i X + B_i M_i + M_i^T B_i^T > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & - (A_i + A_j) X - X (A_i + A_j)^T + B_i M_j + \\ & + B_j M_i + M_i^T B_j^T + M_j^T B_i^T \geq 0, \quad i < j. \end{aligned} \quad (6)$$

então os ganhos são dados por  $F_i = M_i X^{-1}$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ , com garantia da estabilidade assintótica global do sistema.

Prova: (TANAKA; WANG, 2001).

### Lema 2: Taxa de decaimento

Com uma taxa de decaimento  $\beta, \beta > 0$ , a função candidata de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$  será tal que  $\dot{V}(x) \leq -2\beta V(x)$  se as seguintes LMIs foram factíveis:

$$X > 0, \quad (7)$$

$$-X A_i^T - A_i X + M_i^T B_i^T + B_i M_i - 2\beta X > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & -X A_i^T + M_j^T B_i^T - X A_j^T + M_i^T B_j^T - A_i X + \\ & + B_i M_j - A_j X + B_j M_i - 4\beta X \geq 0, \quad i < j, \end{aligned} \quad (9)$$

os ganhos serão dados por  $K_i = M_i X^{-1}$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ , com garantia da estabilidade assintótica global do sistema e taxa de decaimento  $\beta$ .

Prova: (BOYD *et al.*, 1994) e (TANAKA; WANG, 2001).

**Lema 3: Restrição de saída**

Assumindo que a condição inicial  $x(0)$  seja conhecida. A restrição  $\|y(t)\|_2 \leq \lambda$  é cumprida para todo o tempo  $t \geq 0$  se as LMIs a seguir forem satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} X & X C_i^T \\ C_i X & \lambda^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (10)$$

os ganhos do controlador são dados por  $F_i = M_i X^{-1}$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ .

Prova: (TANAKA; WANG, 2001).

**Lema 4: Restrição de entrada**

Assuma que a condição inicial  $x(0)$  é conhecida. A restrição  $\|u(t)\|_2 \leq \mu$  é cumprida para todo o tempo  $t \geq 0$  se as seguintes LMIs forem factíveis:

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (11)$$

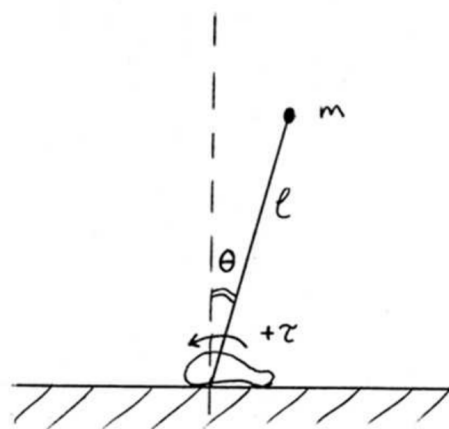
os ganhos do controlador são dados por  $F_i = M_i X^{-1}$ ,  $i \in \mathbb{K}_r$ .

Prova: (TANAKA; WANG, 2001).

**Aplicação: indivíduos paraplégicos mantidos em pé por meio de estímulos elétricos**

Esta aplicação exige que os joelhos, quadris e tronco sejam fixados em uma posição estendida. Nesta configuração, a posição em pé pode ser modelada como um pêndulo invertido de ligação única, assumindo que as duas pernas estejam agrupadas como uma, como mostra a Figura 2.

Figura 1 – Modelo de pêndulo invertido para o caso de indivíduos mantidos em pé por estímulos elétricos.



Fonte: LYNCH (2011).

Assumindo que a massa do corpo esteja concentrada na extremidade da representação do pêndulo, o ângulo de oscilação do corpo  $\theta(t)$  em função do torque

flexor e dorsiflexor pode ser expresso como

$$J\ddot{\theta}(t) = \tau_p(t) + \tau_d(t) + \tau_s(t) + \tau_{dp}(t) - \tau_g(t), \quad (12)$$

onde,  $\ddot{\theta}$  é a aceleração angular do corpo sobre o joelho,  $J$  é o momento de inércia do corpo sobre a articulação do joelho.  $\tau_s(t) = -k\theta(t)$  e  $\tau_{dp}(t) = -B\dot{\theta}(t)$  são os torques relacionados às propriedades de rigidez e amortecimento do joelho, respectivamente; e  $\tau_g(t) = mgl \sin \theta(t)$  é o torque gravitacional em relação à articulação do joelho. Tal que  $k$  e  $B$  são os coeficientes de rigidez e amortecimento, respectivamente,  $m$  é o centro de massa do corpo,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $l$  é o comprimento do pêndulo, ou seja, a dimensão entre a região plantar até o centro de massa do corpo.

Denominando  $\bar{x}_1 = \theta(t)$ ,  $\bar{x}_2 = \dot{\theta}(t)$  e considerando ação de controle somente sobre o músculo agonista, ou seja, o torque total exercido sobre o joelho por meio dos músculos plantar flexores  $\tau_p(t) = a_{ke}\bar{p}(t)$  e o torque total exercido sobre o joelho por meio dos músculos dorsiflexores  $\tau_d(t) = 0$ , a dinâmica de um indivíduo mantido em pé por estímulos elétricos é dada por:

$$\dot{\bar{x}}_2 = \frac{1}{J} (-k\bar{x}_1 - mgl \sin(\bar{x}_1)) - \frac{B}{J}\bar{x}_2 + a_{ke}\bar{p}(t), \quad (13)$$

sendo  $a_{ke}$  a ativação muscular,  $\bar{p}(t)$  a ação do estimulador,  $-10^\circ \leq \bar{x}_1 \leq 10^\circ$ .

Considerando que o ponto de operação do sistema seja  $(\bar{x}_{1e}, \bar{x}_{2e}) = (\theta_0, 0)$ , uma readequação das variáveis de estado deve ser realizado para a análise de estabilidade. Assim, realizando a mudança de variável  $x_1 = \bar{x}_1 - \theta_0$ ,  $x_2 = \bar{x}_2$ ,  $\dot{x}_1 = \dot{\bar{x}}_1$  e  $\dot{x}_2 = \dot{\bar{x}}_2$ ,  $u(t) = \bar{p}(t) - \bar{p}_0$ , tal que  $\bar{p}_0 = \frac{1}{a_{ke}J} [k\theta_0 + mgl \sin(\theta_0)]$ , obtém-se que a seguinte formulação em espaço de estado dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{f}_{21}(x_1(t)) & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{ke} \end{bmatrix} u(t), \quad (14)$$

sendo  $\tilde{f}_{21}(x_1(t)) = \frac{1}{J} \left[ -k - \frac{mgl \sin(x_1 + \theta_0)}{x_1} + \frac{mgl \sin(\theta_0)}{x_1} \right]$  e  $(-10^\circ - \theta_0) \leq x_1 \leq (10^\circ - \theta_0)$  e para os parâmetros do sistema considere a Tabela 1 (LYNCH, 2011).

Tabela 1 – Parâmetros do sistema.

Símbolo	Valor	Unidade
$g$	9.8	$m/s^2$
$k$	235	$Ns/m$
$m$	70	$kg$
$l$	1.70	$m$
$B$	5.16	$Nms/rad$
$J$	73.1	$kgm^2$
$a_{ke}$	1	–

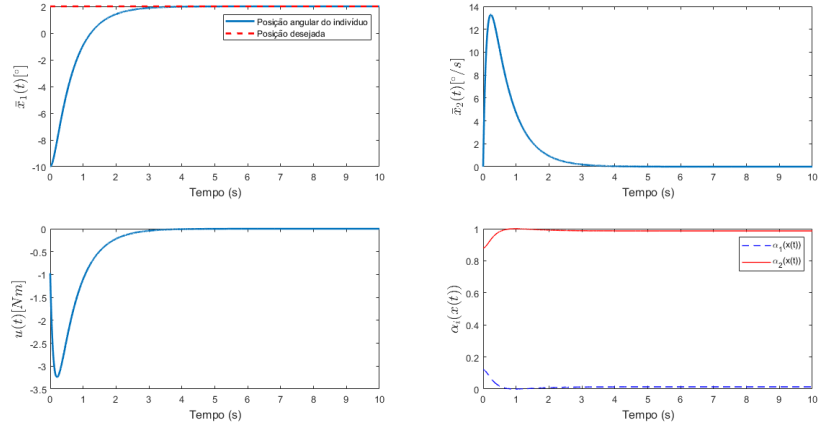
Fonte: LYNCH (2011).

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir dos parâmetros definidos e utilizando a ferramenta MATLAB foi possível obter os modelos locais do sistema, cujo máximo e mínimo da função não linear  $f_{21}(x)$  são dados por  $a_{211} = \max_{x(t)}(\tilde{f}_{21}(x)) = -18.6235$  e  $a_{212} = \min_{x(t)}(\tilde{f}_{21}(x)) = -19.1658$ .

A função  $f_{21}(x)$  pode ser escrita como sendo  $\tilde{f}_{21}(x) = \sigma_{211}(x)a_{211} + \sigma_{212}(x)a_{212}$ ,

Figura 2 – Resultado do indivíduo paraplégico mantido em pé por meio de controle em malha fechada, considerando os critérios de estabilidade, taxa de decaimento, restrição de entrada e de restrição de saída.



Fonte: Autoria própria (2020).

onde  $\sigma_{211} + \sigma_{212} = 1$ . Assim, lembrando que a dinâmica do sistema possui apenas uma não-linearidade, as funções de pertinência  $\alpha_i$  são

$$\alpha_1(x) = \sigma_{211}(x) = \frac{\tilde{f}_{21}(x) - a_{212}}{a_{211} - a_{212}}, \quad \alpha_2(x) = \sigma_{212}(x) = \frac{a_{211} - \tilde{f}_{21}(x)}{a_{211} - a_{212}}. \quad (15)$$

Por fim, os seguintes modelos locais são obtidos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -18.6235 & -0.0706 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -19.1658 & -0.0706 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, para uma condição inicial de  $x(0) = [-10 \ 0]^T$  e incluindo as LMIs de estabilidade, de taxa de decaimento ( $\beta = 0.5$ ), de restrição de entrada ( $\gamma = 10$ ) e de restrição de saída ( $\lambda = 0.5$ ) é obtido

$$F_1 = [-4.9006 \ 5.0462], \quad F_2 = [-5.2770 \ 5.0100], \quad (16)$$

$$P = X^{-1} = \begin{bmatrix} 11.8042 & 6.3022 \\ 6.3022 & 5.3231 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

## CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado o estudo e análise baseada na técnica fuzzy Takagi-Sugeno para a proposição da modelagem e controle de sistemas não-lineares. Obteve-se a representação exata do sistema através de modelos locais lineares, em uma região bem definida do espaço de estados.

A proposta se referiu a um sistema de controle em malha fechada na área de reabilitação, no qual a partir de estímulos elétricos mantêm indivíduos paraplégicos em pé. A abordagem previu o controle dos estímulos por meio de realimentação de estados. Os resultados obtidos indicam garantia de estabilidade, taxa de decai-

mento - que atua diretamente na velocidade de resposta do sistema, restrição da magnitude do sinal de entrada  $u(t)$ , e por fim, a inserção de restrição na saída, que reduziu o *overshoot* das variáveis de saída.

Por fim, para trabalhos futuros pretende-se investigar técnicas de rastreamento de trajetórias para reabilitação e abordagens com controle discreto.

### AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à Universidade Tecnológica Federal do Paraná, pela participação no Programa de Voluntariado em Iniciação Científica e Tecnológica (Edital PROPPG 04/2019-PIVICT). Em seguida, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Wilian Ricardo Bispo Murbak Nunes, pela compreensão e pela ajuda durante o trajeto da iniciação científica. Por último, agradeço à minha família e amigos, pelo apoio.

### REFERÊNCIAS

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, Piscataway, n. 1, p. 116–132, 1985.

GOMIDE, F.; GUDWIN, R. R.; TANSCHKEIT, R. **Conceitos fundamentais da teoria de conjuntos fuzzy, lógica fuzzy e aplicações**. In: PROC. 6 TH IFSA CONGRESS-TUTORIALS. **Anais...** Piscataway, 1995. v. 59, p. 1–38.

LYNCH, C. L. **Closed-loop control of electrically stimulated skeletal muscle contractions**. 131 p. Tese (Doutorado) — University of Toronto, 2011.

MARRO, A. A. *et al.* **Lógica fuzzy: conceitos e aplicações**. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), 2010.

BOYD, S.; *et al.* **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: **Society for Industrial and Applied Mathematics**, 1994. 193 p.

TANAKA, K.; WANG, H. **Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach**. New York: **John Wiley & Sons**, 2001.

TANIGUCHI, T. *et al.* **Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of takagi-sugeno fuzzy systems**. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001.