

Síntese de controladores robustos chaveados, otimizados via matrizes LQR

Synthesis of switched robust controllers, optimized via LQR matrices

RESUMO

Sistemas chaveados oferecem um controle global maior, quando comparado com outros sistemas, devido ao fato que o controlador pode lidar com sistemas LPV (acrônimo em inglês para *Linear Parameter Varying*), sem a necessidade de se medir seu valor a cada instante de tempo. Além de que os controladores robustos chaveados apresentam vantagens de desempenho e obtenção de factibilidade em relação a outros métodos. Neste trabalho, foi desenvolvida uma nova técnica de controle que visa utilizar-se uma otimização com o regulador linear quadrático, que se faz por meio das matrizes Q e R. O problema é encontrar estas matrizes que otimizem o sistema, por isso é utilizado um algoritmo genético com o objetivo de minimizar o critério ITAE (acrônimo em inglês para *Integral of Time-weight Absolute Error*). Também foi demonstrado um exemplo aplicado em um sistema de amortecimento ativo, tanto com parâmetros fixos, como com parâmetros variantes no tempo. No mais, a técnica apresenta um parâmetro para a obtenção de factibilidade que rege o desenvolvimento do sistema, podendo gerar respostas com tempo de acomodação baixo, porém com o risco de comprometer do chaveamento.

PALAVRAS-CHAVE: Sistema chaveado. LQR. Algoritmo genético.

ABSTRACT

Switched systems offer a greater global control, when compared with other systems, due to the fact that the controller can handle LPV systems, without the need to evaluate it every time instant. In addition, switched robust controllers have performances advantages and the possibility of feasibility when compared to other methods. In this work, a new control technique was developed that seeks to use an optimization with the linear quadratic regulator, which is done with the use of Q and R matrices. The problem is to find these matrices that optimize the system, that is why a genetic algorithm is used in order to minimize the ITAE criteria. An example applied in an active suspension system was also added, with both fixed and time-varying parameters. Furthermore, the technique presents a parameter to obtaining feasibility that governs the development of the system, being capable of generating responses with a low accommodation time, but with the risk of compromising the switching.

KEYWORDS: Switched system. LQR. Genetic algorithm.

Pedro de Almeida Pecora
pedro.pecora@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil

Luiz Francisco Sanches Buzachero
luizf@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autorial: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



1. INTRODUÇÃO

Existem diversos problemas práticos em que o chaveamento entre diferentes controladores se faz necessário devido a limitações físicas ou complexas em demasia, como dito em Skafidas *et al.* (1999). Sistemas chaveados oferecem um controle global maior quando comparado com outros sistemas, devido ao fato que o controlador pode lidar com sistemas LPV (acrônimo em inglês para *Linear Parameter Varying*), sem a necessidade de se medir seu valor a cada instante de tempo. Segundo DEAECTO (2010), o projeto de controladores robustos chaveados apresenta vantagens de desempenho e factibilidade em relação a outros. Quando se trata da realimentação de estados para sistemas contínuos, que é utilizado neste trabalho, Skafidas *et al.* (1999) propõe uma regra de chaveamento para selecionar o melhor ganho, dentre um conjunto de ganhos, assegurando assim, a estabilidade assintótica global do sistema em malha fechada.

Uma outra abordagem muito utilizada é o Regulador Linear Quadrático (do inglês *Linear Quadratic Regulator*- LQR), que quando vinculado a um projeto otimizado, visa aumentar o desempenho dos estados e das entradas de controle através das matrizes Q e R. Neste trabalho, estas são geradas por um algoritmo genético (BETETO *et al.*, 2016) que tem como objetivo minimizar o critério ITAE (acrônimo em inglês para *Integral of Time-weight Absolute Error*), este assunto é abordado na sessão de resultados e discussões. O uso das matrizes de ponderação já foi utilizado previamente em outros trabalhos como em CAUN *et al.* (2015), que gerou um controlador LQR-LMI (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*), para um helicóptero 3-DOF (acrônimo em inglês para *Degrees of Freedom*) de bancada. O intuito deste trabalho é apresentar um controle chaveado otimizado, com matrizes LQR para o ponderamento do mesmo.

2. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Nesta seção será apresentada todo o fundamento teórico por trás deste trabalho. Uma matriz aqui representada como X' é igual a X^T , ou seja, X' significa a matriz transposta de X .

2.1. CONTROLADOR LQR VIA LMI'S

Para compreender o controlador demonstrado em termos de LMI é necessário a exemplificação do complemento de Schur (Lema 1), apresentado por (BOYD *et al.*, 1994) abaixo.

Lema 1. (BOYD *et al.*, 1994) Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} M_1(x) & M_2(x)' \\ M_2(x) & M_3(x) \end{bmatrix} \quad (1)$$

sendo $M_1(x) = M_1(x)^T$, $M_3(x) = M_3(x)^T$ e $M_2(x)$ dependem de modo afim de x , é equivalente a (2) ou ainda a (3).

$$M_3(x) > 0, M_1(x) - M_2(x)(M_3(x))^{-1}M_2(x)^T > 0. \quad (2)$$

$$M_1(x) > 0, M_3(x) - M_2(x)(M_1(x))^{-1}M_2(x)^T > 0. \quad (3)$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em (BOYD *et al.*, 1994).

O teorema a seguir, apresentado por (CAUN *et al.*, 2015; GE CHIU e WANG, 2002), propõe condições LMI's suficientes para a estabilização do sistema

Teorema 1. (GE, CHIU e WANG. 2002) Dado $Q \in R^{n \times n}$, $R \in R^{m \times m}$ e $x(0) \in R^{n \times m}$, o sistema $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$, $x_0 = x(0)$ é estável e com desempenho otimizado se existir uma matriz suficiente simétrica $X > 0 \in R^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in R^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:

$\min \mu$

$$X = X^T > 0, Y$$

s. a.

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)' \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} V & X & Y' \\ X & -Q^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (5)$$

Sendo $V = AX + XA' + BY + Y'B'$. O ganho de realimentação por derivada dos estados é dado por

$$K = -YX^{-1}, X^{-1} = P \quad (6)$$

Demonstração. A demonstração pode ser vista em (GE, CHIU e WANG, 2002).

2.2. CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO COM LQR'S VIA LMI'S

O entendimento deste controlador baseia-se nos conceitos demonstrados anteriormente, e é uma contribuição inédita deste trabalho.

Teorema 2. Dada as matrizes de ponderação Q_i e R_i , se existirem matrizes simétricas positivas definidas por $S_i = S_i' > 0$, $S_i \in R^{n \times n}$ e matrizes $Y_i \in R^{m \times n} \forall i \in K$, constantes $\gamma \geq 0$, para obtenção de factibilidade e $\alpha \geq 0$ para a restrição da taxa de decaimento então a origem $x = 0$ do sistema realimentado com os controladores chaveados será um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, estando o sistema sujeito a taxa de decaimento maior ou igual a α , se minimizarmos um escalar $\mu > 0$ tais que as condições (7) e (8) sejam satisfeitas:

$\min \mu$

$$S_i = S_i' > 0, Y_i$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)' \\ x(0) & S_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}\{A_j S_i + B_j Y_i\} - \gamma S_i + 2\alpha S_i & \gamma S_i & \cdots & \gamma S_i & S_i & Y_i' \\ \gamma S_i & -\gamma S_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \gamma S_i & 0 & 0 & \gamma S_N & 0 & 0 \\ S_i & 0 & 0 & 0 & -Q_i^{-1} & 0 \\ Y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_i^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

$i, j \in K \times K$

Onde $\text{Sym}\{x\} = x + x^T$ então a regra de chaveamento

$$\sigma(x(t)) = \min(g(x(t))) = \arg \min_{i \in K} x(t)' S_i^{-1} x(t) \quad (9)$$

e os controladores $K_i = Y_i S_i^{-1}$ para todo $i \in K$ fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, e o sistema estará sujeito a uma taxa de decaimento maior ou igual a α .

Demonstração. Assuma que existam as matrizes S_i para todo $i \in K$ como solução de (7) e (8), para algum $\gamma \geq 0$ e $\alpha \geq 0$. Aplicando o complemento de Schur por duas vezes consecutivas em relação a última linha e última coluna de (8), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}\{A_j S_i + B_j Y_i\} - \gamma S_i + 2\alpha S_i + Y_i' R_i Y_i + S_i Q_i S_i & \gamma S_i & \cdots & \gamma S_i \\ & \gamma S_i & & 0 \\ & \vdots & & 0 \\ & \gamma S_i & & -\gamma S_N \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

Multiplicando os dois lados de (10) por $\text{diag}(S^{-1}, \dots, S^{-1}, I)$, e aplicando novamente o complemento de Schur com relação a segunda linha e segunda coluna, tem-se

$$\text{Sym}\{P_i(A_j + B_j K_i)\} + \gamma(\sum_{j=1}^N P_j - P_i) + 2\alpha P_i + K_i' R_i K_i + Q_i < 0 \quad (11)$$

Sendo $P_i = S_i^{-1}$, para $i, j \in K$. Multiplicando por $\lambda_j \geq 0$ e somando $\forall j = 1, 2, \dots, N$ encontra-se

$$\text{Sym}\{P_i(A_\lambda + B_\lambda K_i)\} + \gamma \sum_{j=1}^N \lambda_j (P_j - P_i) + 2\alpha P_i + K_i' R_i K_i + Q_i < 0. \quad (12)$$

Dado que (12) é garantida $\forall \lambda \in \Lambda$, utilizando-se as condições de Lyapunov-Metzler dependente de parâmetros, então

$$\text{Sym}\{P_i(A_\lambda + B_\lambda K_i)\} + \sum_{j=1}^N \pi_{ji}(\lambda) P_j - 2\alpha P_i < -(K_i' R_i K_i + Q_i) \quad (12)$$

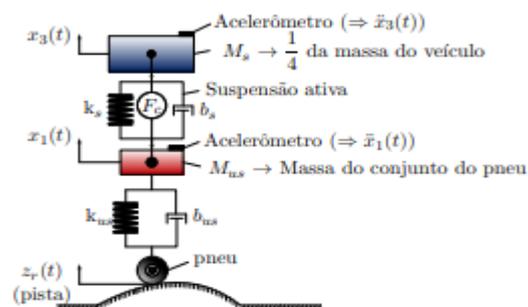
Para todo $i \in K$, $\Pi(\lambda) \in \mathcal{M}$ e $\lambda \in \Lambda$. Sendo assim, conclui-se que

$$v + 2\alpha v(x) < 0. \quad (13)$$

2.3. SISTEMA DE AMORTECIMENTO ATIVO

O sistema a ser utilizado como exemplo é um sistema de amortecimento de uma roda de carro, com o esquemático da Figura 1

Figura 1: Sistema de amortecimento ativo



Fonte: Beteto *et al.* (2016).

O sistema é um modelo de suspensão ativa, sendo a força F_c é a força de controle, que tenta estabilizar a vibração da suspensão causada por instabilidades presentes na pista. Ele tem seu sistema em espaços de estados como segue:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & -\frac{k_{us}}{M_{us}} & -\frac{b_s+b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} u(t), \quad (14)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_3(t) - x_1(t) \\ x_3(t) \\ x_1(t) - z_r(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} e u(t) = [F_c] = -Kx(t).$$

Com os parâmetros de (14) presentes na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros da suspensão ativa

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa de $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo (kg)	M_s	2,45
Massa do conjunto do pneu (kg)	M_{us}	1
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_s	900
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_{us}	2500
Coefficiente de amortecimento (N · s/m)	b_s	7,5
Coefficiente de amortecimento (N · s/m)	b_{us}	5

Fonte: BETETO *et al.* (2016).

Segundo BETETO *et al.* (2016) este modelo físico de suspensão ativa contém 2 cargas extras com um peso de 0,4975 kg, portanto, o valor de M_s pode variar no intervalo de $1,455 \leq M_s \leq 2,45$ (kg). A fim de comparar valores com o conceito aqui apresentado, também foi adicionada uma falha no amortecedor b_{us} com isto, b_{us} também se torna uma incerteza variando entre $0 \leq b_{us} \leq 5$ (N × s/m).

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Tomando como base o sistema em espaços de estados apresentado em (14), juntamente com os seus valores na Tabela 1 e os valores de intervalo, levando em consideração os valores mínimo e máximo de M_s e b_{us} , foi gerado um politopo de incerteza com 4 matrizes A e 2 matrizes B. Foram então criadas matrizes de ponderação Q e R via um algoritmo genético que será explicado abaixo, em cima de cada combinação do politopo. O algoritmo foi criado com o intuito de minimizar o critério de desempenho ITAE que representa o erro absoluto entre a entrada e a saída vezes o tempo:

$$ITAE = \int_0^{T_s} t|e(t)|dt \quad (15)$$

Para a inicialização do algoritmo, valores aleatórios da primeira geração foram colocados nas matrizes de ponderação, e o Teorema 2 foi utilizado com o sistema da suspensão ativa. O valor do ITAE foi calculado a cada indivíduo, então os indivíduos com menores valores geraram as próximas gerações, com novos valores para

as matrizes e assim por diante, até o valor de ITAE não apresentar diferenças significantes entre gerações. Com isso, foram geradas as seguintes matrizes:

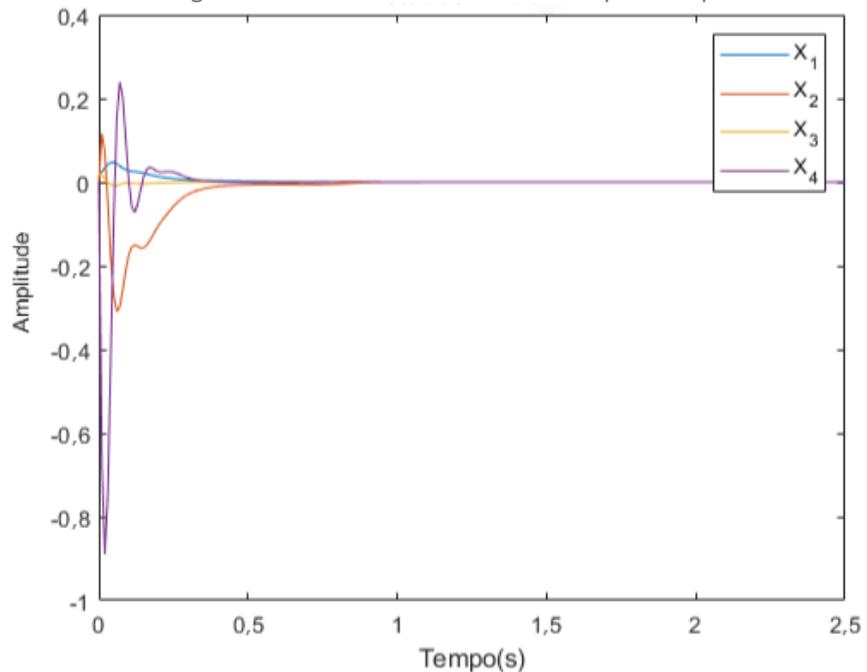
$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \begin{bmatrix} 1812,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 38,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1425,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1738,3 \end{bmatrix}, & R_1 &= 2660,5 \\
 Q_2 &= \begin{bmatrix} 1061,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2705,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2534,8 \end{bmatrix}, & R_2 &= 2075,3 \\
 Q_3 &= \begin{bmatrix} 2098,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2453,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1791,2 \end{bmatrix}, & R_3 &= 2026,3 \\
 Q_4 &= \begin{bmatrix} 246,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 241,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1515,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,6 \end{bmatrix}, & R_4 &= 2412,1
 \end{aligned} \tag{16}$$

Juntamente com as matrizes A, B, $x_0 = [0,02 \ 0 \ 0,02 \ 0]'$, $\alpha = 4$, $\gamma = 20,8$ e o número de controladores (índice N do Teorema 2) = 4. Com estes valores, aplicados no Teorema 2, foram obtidos os seguintes valores de ganhos K

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [-465,7 \quad -292,1 \quad 3393,8 \quad -34,6] \\
 K_2 &= [-570,2 \quad -333,7 \quad 3976,3 \quad -44,0] \\
 K_3 &= [-580,4 \quad -337,8 \quad 4033,8 \quad -44,9] \\
 K_4 &= [-506,4 \quad -308,3 \quad 3619,1 \quad -38,2]
 \end{aligned} \tag{17}$$

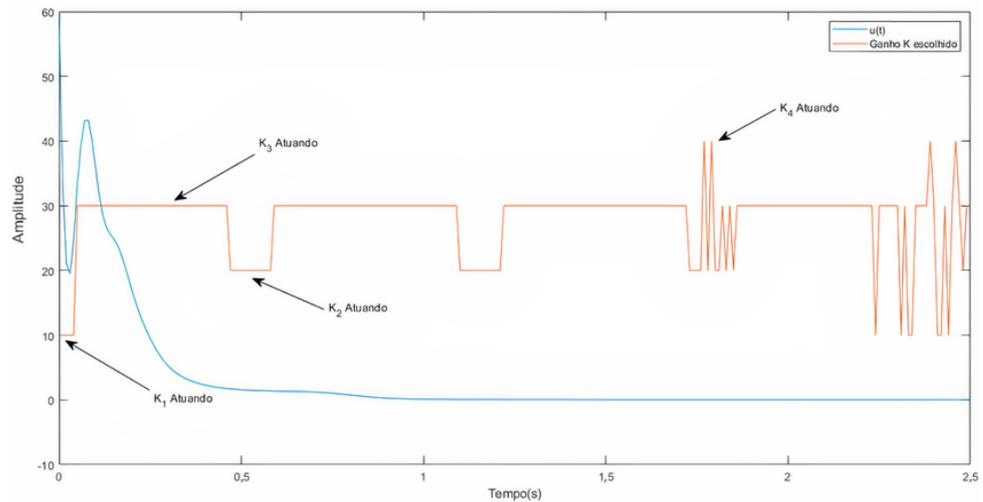
Dados estes ganhos, o sistema evolui como visto na Figura 2, levando em consideração a abrangência de todos os pontos do politopo. Na Figura 3, é possível ver a comparação entre o sinal de controle $u(t)$ e o ganho K escolhido pela lei de chaveamento σ ao decorrer do tempo.

Figura 2: Desenvolvimento dos estados pelo tempo.



Fonte: Autoria própria (2020).

Figura 3: Sinal de controle pelo tempo.



Fonte: Autoria própria (2020).

Mudando o valor de α , o sistema pode se comportar de maneira diferente, tendo um tempo de acomodação maior ou menor, ser ou não factível, um valor de ITAE maior, o sistema pode ou não chavear, este quesito foi observado durante o desenvolvimento do trabalho. O teorema também garante flexibilidade na quantidade de controladores juntamente com os parâmetros variantes no tempo.

4. CONCLUSÕES

Pode-se perceber como os parâmetros para a obtenção de factibilidade mexem com o sistema, como em seu tempo de acomodação e como o chaveamento é dado pelo mesmo. Quanto maior o α , entre outros fatores, menor o tempo de acomodação, porém o chaveamento pode não ocorrer, devido a lei de chaveamento presente no Teorema 2, que escolhe o menor valor, portanto o controlador K escolhido pode ser um único, durante todo o período de controle do sistema. O chaveamento também pode ser muito frequente, tendo em vista que é considerado uma frequência ilimitada de chaveamento, que não é ótimo para sistemas reais. Os sistemas que possam utilizar deste equacionamento podem conter parâmetros variantes no tempo, por exemplo um reservatório com um furo em um sistema de freio a ar de caminhões, o que abrange uma outra dimensão para os problemas que possam ser encontrados.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Dr. Luiz Francisco Sanches Buzachero e ao Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari, que me auxiliaram na construção dos algoritmos utilizados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

BETETO, M. A. L. **Síntese de controladores robustos LQR-derivativo por aproximações LMIs: sintonia via algoritmo genético**. 2016. 63 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Controle e Automação) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, PR. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/11390>. Acesso em: 10 mar. 2020.

BOYD, S. *et al.* Linear matrix inequalities in system and control theory. **SIAM: Studies in Applied Mathematics**, Filadélfia. v. 15, 1994. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/1.9781611970777>. Acesso em: 17 fev. 2020.

CAUN, R. P. *et al.* Controlador LQR via aproximação LMI com restrição de taxa de decaimento aplicado ao helicóptero 3-DOF de bancada. **Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**, Natal, v. 12, out. 2015.

DA SILVA, E. R. P. *et al.*: Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback. **Mathematical Problems in Engineering**. New York: Hindawi Publishing Corporation, p. 21, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/9870>. Acesso em: 25 mar. 2020.

DEAECTO, G. S. **Projeto de controladores dinâmicos com comutação: aplicação em sistemas mecânicos e conversores de potência CC-CC**. 2010. 161 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Campinas, SP. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/260901>. Acesso em: 17 mar. 2020.

GE, M.; CHIU, M.; WANG, Q. Robust PID controller design via LMI approach. **Journal of Process Control**, v. 12, n. 1, p. 3-13, jan. 2002. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959152400000573>. Acesso em: 17 abr. 2020.

KWAK, S.K.; WASHINGTON, G.; YEDAVALLI, R.K. Acceleration feedback-based active and passive vibration control of landing gear components. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 15. p. 1-9, jan. 2002.

REPINALDO, J. P. **Controle modal aplicado a uma estrutura de 2 graus de liberdade utilizando atuadores eletromagnéticos**. 2018. 128 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2018. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/11390>. Acesso em: 06 mar. 2020.

SKAFIDAS, E. et al.: Stability results for switched controller systems. **Automatica**, v. 35, p. 553–564, 1999. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109898001678>. Acesso em: 09 mar. 2020.