

<https://eventos.utfpr.edu.br/sicite/sicite2020>

## Síntese de controladores robustos aplicado a uma estrutura 2DOF.

## Synthesis of robust controllers applied to a 2DOF structure.

### RESUMO

**Caroline do Rego Fernandes**  
[carolinerf98@icloud.com](mailto:carolinerf98@icloud.com)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil

**Luiz Francisco Sanchez Buzachero**  
[luizf@utfpr.edu.br](mailto:luizf@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil

O presente trabalho tem como objetivo o controle robusto de vibração de um sistema com 2 graus de liberdade. Primeiramente foi feita a análise do sistema em questão, com análise em espaço de estado e modal. Com a formulação necessária do sistema, aplicou-se a teoria de D-estabilidade para controlar a vibração do sistema. Esta teoria foi utilizada devido as incertezas que o sistema apresenta, facilitando o controle deste e obtendo um valor para ganho dentro do esperado, mostrando que a teoria foi efetiva. O trabalho foi realizado com o auxílio do software Matlab e do pacote YALMIP, todas as simulações foram feitas neste software.

**PALAVRAS-CHAVE:** Liberdade. Vibração. Matlab.

### ABSTRACT

The presente work aims at the robust control of vibrations of a system with 2 degrees of freedom. First analysis of the system in question was made, with state-space, and modal analysis. With the necessary formulation of the system, the D-stability theory was applied to control the vibrations of the system. This theory was used due to the uncertainties that the system presents, facilitating its control and obtaining an expected gain value, showing that the theory was effective. The work was carried out with the aid of the Matlab software and YALMIP package, all simulations were carried out on this software.

**KEYWORDS:** Freedom. Vibration. Matlab.

**Recebido:** 19 ago. 2020.

**Aprovado:** 01 out. 2020.

**Direito autoral:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## 1. INTRODUÇÃO

Controle Robusto trata-se de um ramo da teoria de controle que lida com as incertezas na representação do modelo na planta. Os controladores que são projetados, utilizando controle robusto, superam diferenças entre o modelo real da planta e o modelo nominal que é utilizado no projeto. Pensando nisso, projetou-se um controlador que irá estabilizar um sistema com dois graus de liberdade.

Segundo Repinaldo (2018), um movimento oscilatório é como o sistema comporta-se, geralmente denominado como vibração. Quando esta vibração é apresentada em grande quantidade, ocasiona problemas no desempenho do sistema. Sendo importante o controle da vibração destes equipamentos em estudos das engenharias e suas áreas. Repinaldo (2018) apresentou todo o comportamento de um sistema com dois graus de liberdade, utilizando-se de teorias em análise em espaço de estado e em análise modal.

Chiali e Gahinet (1996) apresentaram uma aplicação e extensão das várias técnicas existentes em controle robusto, denominado  $\mathcal{D}$ -estabilidade, restringindo os autovalores de cada vértice do politopo em malha fechada, atendendo as LMIs (Desigualdades Matriciais Lineares, do inglês Linear Matrix Inequalities) apresentadas. Moraes, Ribeiro e Buzetti (2019) demonstraram uma expansão da teoria mostrada por Chiali e Gahinet (1996) e obtendo novos modos de utilização de  $\mathcal{D}$ -estabilidade. Este trabalho tem como objetivo a redução das vibrações de uma estrutura 2-DOF (Grau de Liberdade, do inglês Degree Of Freedom) com o auxílio da teoria de Controle Robusto, dado que o produto da estrutura apresenta incertezas paramétricas.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

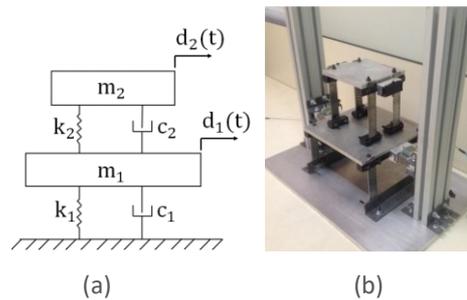
### 2.1 SISTEMA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Segundo Rao e Yap (2011), o Grau de Liberdade (DOF) é o número de coordenadas independentes necessárias para determinar totalmente as posições dos componentes do sistema em qualquer instante de tempo. Logo, o sistema com dois graus de liberdade é o sistema que necessita de duas coordenadas para descrever seu movimento.

O sistema em questão é baseado em um sistema massa-mola-amortecedor. Sendo composto por duas massas  $m_1$  e  $m_2$ , sustentadas por molas com coeficientes de rigidez  $k_1$  e  $k_2$ , e amortecedores com coeficientes de amortecimento  $c_1$  e  $c_2$ . O sistema em questão assim como seu esquemático podem ser vistos na Figura 1 e ter a dinâmica representada como um sistema massa-mola-amortecedor. Com o auxílio das Leis de Newton, foram feitas a modelagem do sistema, demonstrada na equação (2.1.1).

$$[m]\{d(t)\} + [c]\{d(t)\} + [k]\{d(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.1.1)$$

Figura 1 - Modelo esquemático (a). Bancada experimental (b).



Fonte: Repinaldo (2018).

Onde  $[m]$ ,  $[k]$  e  $[c]$  são matrizes de massa, rigidez e amortecimento, respectivamente, e dadas pelas equações (2.1.2), (2.1.3) e (2.1.4).

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

Já os vetores de deslocamento  $\{d(t)\}$  e de força  $\{F(t)\}$  são apresentados pelas equações (2.1.5) e (2.1.6).

$$\{d(t)\} = \begin{Bmatrix} d(t)_1 \\ d(t)_2 \end{Bmatrix} \quad (2.1.5)$$

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F(t)_1 \\ F(t)_2 \end{Bmatrix} \quad (2.1.6)$$

Como pode-se ver pelas equações demonstradas, o movimento de uma das massas influencia na outra. A modelagem do sistema feita inicialmente por Repinaldo (2018) utilizou teorias do domínio modal para análise e validação do modelo. No entanto, como o presente trabalho se restringirá somente no controle desse sistema e não em uma nova modelagem, esta parte será omitida na fundamentação teórica, sendo utilizados somente seus resultados para aplicação do controle. Outra modelagem utilizada pela autora foi por espaço de estados, tendo em vista que, segundo Ogata (2003), os ganhos do controlador são obtidos a partir das matrizes de comportamento do sistema.

Com isso, a modelagem será segundo a equação (2.1.7)

$$\{\dot{x}(t)\} = [A]\{x(t)\} + [B_u]\{u(t)\} + [B_w]\{w(t)\} \quad (2.1.7)$$

$$\{y(t)\} = [C]\{x(t)\}$$

Sendo  $[A]$  a matriz de estado,  $[B_u]$  a de entrada de força de controle,  $[B_w]$  a de entrada de força de excitação,  $[C]$  a matriz de saída,  $x(t)$  o vetor de estados de ordem  $2n \times 1$ ,  $y(t)$  o vetor de saída de ordem  $n \times 1$ ,  $u(t)$  o vetor da força de controle de ordem  $n_u \times 1$  e  $w(t)$  o vetor da força de excitação de ordem  $n_w \times 1$ . Sendo ainda  $n$  o número de GDL,  $n_s$  o número de saídas,  $n_u$  o número de entradas da força de controle e  $n_w$  o número de entradas da força de excitação.

Logo,

$$\{x(t)\}_{2nx1} = \begin{Bmatrix} d(t)_{2nx1} \\ \dot{d}(t)_{2nx1} \end{Bmatrix} \quad (2.1.8)$$

$$[A]_{2nx2n} = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} & [I]_{n \times n} \\ [-[m]^{-1}[k]]_{n \times n} & [-[m]^{-1}[c]]_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (2.1.9)$$

$$[B_u]_{2nxnu} = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} [P_w]_{n \times nu} \\ [m]^{-1}_{n \times n} [P_u]_{n \times xnu} \end{bmatrix} \quad (2.1.10)$$

$$[B_w]_{2nxnw} = \begin{bmatrix} [0]_{n \times n} [P_w]_{n \times nw} \\ [m]^{-1}_{n \times n} [P_u]_{n \times xnw} \end{bmatrix} \quad (2.1.11)$$

$$[C]_{nsxn} = [[P_s]_{nsxn} [I]_{n \times n} \quad [P_s]_{nsxn} [0]_{n \times n}] \quad (2.1.12)$$

Onde  $[P_u]$  é a matriz de posicionamento da força de controle,  $[P_w]$  a de posicionamento da força de excitação e  $[P_s]$  a de posicionamento da saída. Para o sistema estudado de 2 DOF, 1 saída ( $n_s$ ), 1 entrada de controle ( $n_u$ ) e 1 entrada de excitação ( $n_w$ ), a modelagem fica da seguinte forma:

$$\{x(t)\}_{4x1} = \begin{Bmatrix} d(t)_{4x1} \\ \dot{d}(t)_{4x1} \end{Bmatrix} \quad (2.1.13)$$

$$[A]_{4x4} = \begin{bmatrix} [0]_{2 \times 2} & [I]_{2 \times 2} \\ [-[m]^{-1}[k]]_{2 \times 2} & [-[m]^{-1}[c]]_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (2.1.14)$$

$$[B_u]_{4x1} = \begin{bmatrix} [0]_{2 \times 2} [P_w]_{2 \times 1} \\ [m]^{-1}_{2 \times 2} [P_u]_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (2.1.15)$$

$$[B_w]_{4x1} = \begin{bmatrix} [0]_{2 \times 2} [P_w]_{2 \times 1} \\ [m]^{-1}_{2 \times 2} [P_u]_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (2.1.16)$$

$$[C]_{1x2} = [[P_s]_{1 \times 2} [I]_{2 \times 2} \quad [P_s]_{1 \times 2} [0]_{2 \times 2}] \quad (2.1.17)$$

## 2.2 TEORIA DE CONTROLE

Chiali e Gahinet (1996) faz uma extensão do Teorema de Lyapunov. Considerando como regiões de interesse  $\alpha$ -estabilidade, onde  $Re(s) \leq -\alpha$  tem-se faixas verticais, discos e setores cônicos. Chiali e Gahinet (1996) ainda define uma outra região de interesse para fins de controle  $S(\alpha, r, \theta)$  de números complexos  $x + jy$  tais que

$$x < -\alpha < 0, \quad |x + jy| < r, \quad \tan \theta x < -|y| \quad (2.2.1)$$

Ao trabalhar com o plano em malha fechada, a região  $\alpha$  terá uma taxa mínima de decaimento, uma taxa mínima de amortecimento pela razão de  $\zeta = \cos \theta$  e uma frequência natural não amortecido  $\omega_d = r \sin \theta$ . Esses 3 parâmetros irão limitar o overshoot, a frequência dos modos oscilatórios, o tempo de atraso, o tempo de subida e o tempo de acomodação.

Chiali e Gahinet (1996) consideram que  $\mathcal{D}$  é uma sub-região do complexo plano da metade esquerda, com um sistema dinâmico  $x = Ax$  e os polos estão em

$\mathcal{D}$ , ou seja, os autovalores da matriz  $A$  estão em  $\mathcal{D}$ , é definida como  $\mathcal{D}$ -estabilidade. A matriz  $A$  será estável se, e somente se, houver uma matriz  $X$  que satisfaça

$$AX + XA' < 0, \quad X > 0 \quad (2.2.2)$$

Para manter o problema de síntese tratável na estrutura LMI, Chiali e Gahinet (1996) diz que é necessário usar uma caracterização de agrupamento de polos, preservando essa dependência. Ou seja, é necessário usar condições afins na matriz de estados  $A$ , como a condição de estabilidade de Lyapunov. A região da LMI resulta em ser adequada para a síntese baseada em LMI. Para isso, uma matriz  $M$  de dimensão  $m \times m$  é definida abaixo.

**Definição 1:** um subconjunto  $\mathcal{D}$  do plano complexo é chamado de região LMI se existir uma matriz simétrica  $\alpha = [\alpha_{kl}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e a matriz  $\beta = [\beta_{kl}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  de modo que

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}: f_{\mathcal{D}}(z) < 0\} \quad (2.2.3)$$

Com

$$f_{\mathcal{D}}(z) := \alpha + z\beta + \bar{z}\beta' = [\alpha_{kl} + \beta_{kl}z + \beta_{lk}\bar{z}]_{1 \leq k, l \leq m} \quad (2.2.4)$$

A função característica recebe valores no espaço de  $m \times m$  de uma matriz Hermitiana, ou seja, uma matriz idêntica à sua transposta conjugada. Uma região LMI é um subconjunto do plano complexo representável por  $z$  e  $\bar{z}$ , ou uma LMI em  $x = \text{Re}(z)$  e  $y = \text{Im}(z)$ . Com isso, tem-se LMI com regiões convexas. Elas, também, são simétricas em relação ao eixo real, pois para qualquer  $z \in \mathcal{D}$ ,  $f_{\mathcal{D}}(\bar{z}) = \overline{f_{\mathcal{D}}(z)} < 0$ . Segundo Chiali e Gahinet (1996), a região LMI pode ser caracterizada em termos do bloco de matrizes  $m \times m$ . Como pode observar no Teorema abaixo

**Teorema 1:** A matriz  $A$  é estável em  $\mathcal{D}$  se, e somente se, houver uma matriz simétrica  $X$  tal que

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) < 0, \quad X > 0 \quad (2.2.5)$$

Com essa definição, consegue-se substituir  $(X, AX, XA') \leftrightarrow (1, z, \bar{z})$ . Se tomarmos, como exemplo, um disco com raio  $r$  e um centro  $(-q, 0)$ , pode concluir que esta é uma região LMI, com a seguinte característica

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{pmatrix} -r & q+z \\ q+\bar{z} & -r \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

Neste caso, a equação (2.2.6) fica

$$\begin{pmatrix} -rX & qX + AX \\ qX + XA' & -rX \end{pmatrix} < 0, \quad X > 0 \quad (2.2.7)$$

Para uma analogia geral da região  $S(\alpha, r, \theta)$ , utilizando o Teorema 1, tem-se a seguinte caracterização da LMI

$$AX + XA' + 2\alpha X < 0 \quad (2.2.8)$$

$$\begin{pmatrix} -rX & AX \\ XA' & -rX \end{pmatrix} < 0 \quad (2.2.9)$$

$$\begin{pmatrix} \text{sen } \theta (AX + XA') & \cos \theta (AX - XA') \\ \cos \theta (XA' - AX) & \text{sen } \theta (AX + XA') \end{pmatrix} < 0 \quad (2.2.10)$$

Moraes, Ribeiro e Buzetti (2019) adapta as equações (2.2.8), (2.2.9) e (2.2.10) considerando que exista  $Z \in \mathbb{R}^{m \times m}$  positiva e que as matrizes simétricas  $M_j, Q_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tais que

$$-B_j Z_j - Z_j' B_j' - M_j - Q_j < 0 \quad (2.2.11)$$

Logo, as equações ficam

$$A_j X + X A_j' - B_j Z_j - Z_j' B_j' + 2\alpha X < 0 \quad (2.2.12)$$

$$\begin{pmatrix} -rX & A_j X - B_j Z_j \\ \bullet & -rX \end{pmatrix} < 0 \quad (2.2.13)$$

$$\begin{pmatrix} \text{sen } \theta (A_j X + X A_j' - B_j Z_j - Z_j' B_j') & \cos \theta (A_j X - X A_j' - B_j Z_j + Z_j' B_j') \\ \bullet & \text{sen } \theta (A_j X + X A_j' - B_j Z_j - Z_j' B_j') \end{pmatrix} < 0 \quad (2.2.14)$$

A região  $S(\alpha, r, \theta)$  apresenta uma taxa de decaimento  $\alpha$ , um disco de raio  $r$  e duas assíntotas com ângulo  $\theta$ .

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Definindo a matriz  $A$  da equação (2.1.9) de dimensão  $4 \times 4$  e composta pelos parâmetros  $k_1, k_2$  e  $c_1$ . Sendo estes parâmetros incertos, projetam-se 8 matrizes  $A$ , com as combinações de máximo e mínimo desses parâmetros. Os valores de  $c_2$  foram desconsiderados devido serem muito próximos de zero, não alterando consideravelmente a análise e desenvolvimento do projeto.

Assim, a matriz  $A$  utilizada foi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{-c_1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os valores utilizados para tais variáveis foram retirados da tese de mestrado de Repinaldo (2018). Sendo estes:  $m_1 = 4,38262 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1,93959 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 21506,7 \text{ N/m}$ ,  $k_{1max} = k_1 * 1,0082$ ,  $k_{1min} = k_1 * (1 - 0,0082)$ ,  $k_2 = 14739,81 \text{ N/m}$ ,  $k_{2max} = k_2 * 1,0045$ ,  $k_{2min} = k_2 * (1 - 0,0045)$ ,  $c_1 = 14,43 \text{ N.s/m}$ ,  $c_{1max} = c_1 * 1,0081$ ,  $c_{1min} = c_1 * (1 - 0,0081)$ . Obtendo, assim, as matrizes  $A$  de 0 a 7 para todos os casos citados.

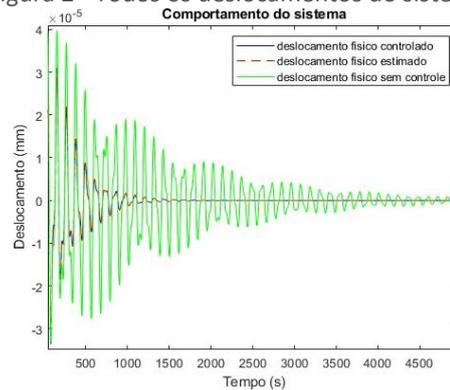
Para o presente trabalho, foi utilizada apenas uma entrada de excitação, uma entrada de controle (na massa  $m_1$ ) e foi medida uma saída (na mesma massa de entrada). Utilizando, então, a matriz  $B_u$  seguinte

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz  $B_w = B_u$  e a matriz  $C = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ . Para a forma de controle citada na metodologia utilizou-se as matrizes P, Z, M, Q foram analisadas para que de encaixassem na LMI descrita, respeitando as devidas dimensões. As matrizes foram definidas segundo o comando “sdpvar” do pacote YALMIP, que cria matrizes parametrizadas de decisões simbólicas. As dimensões das matrizes serão  $P = 4 \times 4$ ,  $Z = 1 \times 4$ ,  $M = 4 \times 4$ ,  $Q = 4 \times 4$ . Na análise de controle, o sistema obteve factibilidade apenas atribuindo valores a  $\alpha$ , quando se coloca restrições para  $\theta$  e  $r$ , o sistema não apresenta factibilidade. O melhor valor para  $\alpha$  foi -96. Com isso, as matrizes M e Q não foram utilizadas para encontro do ganho e estabilidade do sistema.

Estes valores foram testados e com melhores resultados para estabilidade do sistema. Dados os requisitos atendidos, encontrou-se uma matriz K com ganhos para o controlador. Este ganho foi calculado através de  $K = Z * X^{-1}$ . Sendo estes valores  $K_{robusto} = [-0,3661 \ 0,1367 \ -0,0044 \ 0,0007]$ . Com base nesses valores, foi feita a simulação do modelo gerando a resposta mostrada abaixo. Esse valor de K é multiplicado pela matriz  $B_u$  e somado ao sistema para a ação de controle. Pode-se observar os três comportamentos do sistema na Figura abaixo.

Figura 2 - Todos os deslocamentos do sistema.



Fonte: Autoria própria.

#### 4. CONCLUSÃO

No decorrer do trabalho, foi possível observar o comportamento do sistema apresentado para diversos valores atribuídos de  $(\alpha, \theta, r)$ , podendo observar que apenas o alfa deixa o sistema com factibilidade. O melhor valor encontrado e que melhor estabiliza o sistema foi  $\alpha = -96$ . Com estes valores e as matrizes X e Z adequadas para a resolução do sistema, encontrou-se os valores para o ganho  $K_{robusto} = [-0,3661 \ 0,1367 \ -0,0044 \ 0,0007]$ . Estando dentro do esperado, concluindo que o sistema é estável utilizando o controle  $\mathcal{D}$ -estabilidade. Estes valores de ganho foram o que melhores estabilizaram o sistema e não estando altos, facilitando a aplicação prática futura.

## REFERÊNCIAS

CHIALI, M; GAHIMET, P.  **$H_{\infty}$  design with pole placement constraints: an LMI approach. Automatic Control.** IEEE Transactions on Automatic Control, v, 41, n. 3, p 358 – 367, mar. 1996.

MORAES, M. A; RIBEIRO, J. M. S; BUZETTI, A. S. Projeto via LMIs de controlador  $H_{\infty}$  chaveado para sistemas incertos, aplicado ao sistema 2D DOF ball balancer com  $\mathcal{D}$ -estabilidade In: ANAIS DO 14º SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 2019, Ouro Preto. **Anais eletrônicos...** Campinas, Galoá, 2019. Disponível em: <<https://proceedings.science/sbai-2019/papers/projeto-via-lmis-de-controlador-h----chaveado-para-sistemas-incertos--aplicado-ao-sistema-2-dof-ball-balancer-com-d-esta>> Acesso em: 07 ago. 2020.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno.** 4 ed. Prentice Hall, São Paulo, 2003.

RAO, S. S.; YAP, F. F. **Mechanical vibrations.** Prentice Hall, Upper Saddle River, 2011. v. 4.

REPINALDO, J. P. **Controle modal aplicado a uma estrutura de 2 graus de liberdade utilizando atuadores eletromagnéticos.** 2018. 128 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Cornélio Procópio, [S. l.], 2018.