

## Projeto de controladores via LMIs utilizando a realimentação derivativa

### LMI-based controller design using state-derivative feedback

#### RESUMO

Utilizando desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* (LMIs)), este trabalho tem como objetivo projetar controladores e aplicá-los em um sistema de uma estrutura de dois graus de liberdade, que vão garantir que as técnicas sejam satisfeitas. As técnicas que serão investigadas serão a estabilidade com restrição na taxa de decaimento, a D-estabilidade e a C-estabilidade. Para a síntese dos controladores será utilizada a realimentação derivativa, ao invés da realimentação de estados convencional, devido a sua implementação fácil em sistemas mecânicos, considerando os acelerômetros para medir os estados do sistema. Três exemplos, um para cada técnica, ilustrarão o método proposto e sua eficiência.

**PALAVRAS-CHAVE:** Realimentação derivativa. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). Estabilidade com restrição na taxa de decaimento. D-estabilidade. C-estabilidade.

#### ABSTRACT

Using Linear Matrix Inequalities (LMIs), this paper aims to design controllers and apply them in a two-degrees-of-freedom system, which will ensure the techniques are satisfied. The techniques that will be investigated will be decay-rate-constrained stability, D-stability and C-stability. For the synthesis of the controllers, state-derivative feedback will be used, instead of conventional state feedback, due to its easy implementation in mechanical systems, considering the accelerometers to measure the states of the system. Three examples, one for each technique, will illustrate the proposed method and its efficiency.

**KEYWORDS:** State-derivative feedback. Linear matrix inequalities. Decay-rate-constrained stability. D-stability. C-stability.

**Recebido:** 19 ago. 2020.

**Aprovado:** 01 out. 2020.

**Direito autoral:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

Comumente, na realimentação de um sistema o controle de malha fechada vai comparar o sinal de referência, com o sinal de saída e, caso necessário, corrigir o erro entre eles. Todavia, existe uma outra técnica, conhecida como realimentação derivativa, que pode ser muito efetiva no controle de certos sistemas dinâmicos, tal como em sistemas de vibração (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004).

Nos sistemas mecânicos de vibrações, há ocasiões em que são mais fáceis obter a derivada dos estados do que os estados. Dessa forma, a partir do uso de sensores do tipo acelerômetros é possível obter, com boa precisão, o sinal da aceleração e construir o sinal da velocidade, através da integração. Já o sinal de deslocamento pode apresentar imprecisão, devido a dupla integração (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004).

Para a síntese do controlador é necessário o uso de uma técnica de controle. Neste trabalho serão utilizadas as desigualdades matriciais lineares, que viabilizam a inclusão de condições e definição de parâmetros. Aqui, serão explorados a estabilidade com restrição na taxa de decaimento, a  $D$ -estabilidade e a  $C$ -estabilidade.

Os projetos serão aplicados no controle de vibração de uma estrutura de dois graus de liberdade, e a verificação do comportamento do sistema controlado será feita a partir de simulações computacionais.

## METODOLOGIA

**Realimentação Derivativa.** Considere um sistema controlável, linear e invariante no tempo, descrito pela equação (1).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

sendo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  matrizes que descrevem o comportamento dinâmico do sistema,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada de controle.

Para viabilizar o projeto da realimentação derivativa), o propósito é realimentar o sistema pela entrada de controle (2).

$$u(t) = -K\dot{x}(t), \quad (2)$$

sendo a finalidade projetar uma matriz constante  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  que satisfaça a condição de malha-fechada (3).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\dot{x}(t) \Leftrightarrow \dot{x}(t) = (I + BK)^{-1}Ax(t), \quad (3)$$

sendo  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz identidade.

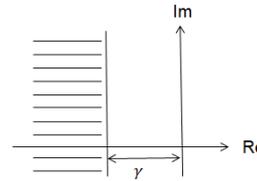
**Condição de Estabilidade com Restrição na Taxa de Decaimento ( $\gamma$ ).** A taxa de decaimento  $\gamma > 0$ , é obtida se a condição em (4)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq -2\gamma V(x(t)) \Leftrightarrow \\ \dot{x}(t)Px(t) + x(t)^T P\dot{x}(t) &\leq -2\gamma x(t)^T Px(t), \end{aligned} \quad (4)$$

for satisfeita para toda trajetória  $x(t)$  do sistema (BOYD et al., 1994).

Pela substituição de  $\dot{x}(t)$  pelo sistema (3) tem-se o Lema 2, no qual apresenta condições necessárias e suficientes para o sistema ser estabilizável com restrição na taxa de decaimento,  $\gamma$ . A Figura 1 mostra a alocação dos polos utilizando a taxa de decaimento.

Figura 1—Alocação de polos considerando a restrição da taxa de decaimento.



Fonte: Adaptado de (FARIA, 2009).

**Lema 2:** Admita que o sistema (1) não possua autovalores na origem, ou seja,  $\det(A) \neq 0$ , o sistema (3) é estabilizável com restrição na taxa de decaimento,  $\gamma$ , se existir uma matriz simétrica  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$  que satisfaçam as LMIs:

$$\begin{aligned}
 & X > 0, \\
 & \begin{bmatrix} XA^T + AX + BYA^T + AY^T B^T & X + BY \\ X + Y^T B^T & -X/(2\gamma) \end{bmatrix} < 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

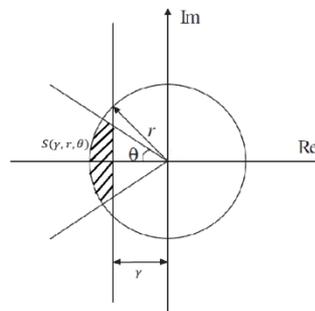
**Demonstração:** Vide (ASSUNÇÃO et al., 2007).

**Condições para a D-estabilidade ( $\gamma, r, \theta$ ).** A localização dos autovalores no plano complexo está diretamente ligada com o comportamento transitório de um sistema dinâmico qualquer (DA SILVA et al., 2012). Dessa forma, pode-se alocar os autovalores de um sistema a ser controlado em uma região  $D$  desejada, buscando índices de desempenho favoráveis.

**Definição 1:** Seja uma região  $D$  no semi-plano complexo esquerdo. Se uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  possui todos os seus autovalores dentro dessa região  $D$ , é dito que  $A$  é  $D$ -estável (CHILALI; GAHINET, 1996, p.358-367).

A região  $D$  é composta por três índices de desempenho: a taxa de decaimento ( $\gamma$ ), o limitante de tempo de subida durante o transitório ( $r$ ) e o fator de amortecimento ( $\theta$ ), vistos na Figura 2.

Figura 2—Alocação de polos considerando a Região  $S(\gamma, r, \theta)$ .



Fonte: Adaptado de (DA SILVA et al., 2012).

As condições necessárias e suficientes, presentes no Lema 3, podem ser utilizadas para que o sistema (3) seja D-estabilizável.

**Lema 3:** Admita que o sistema (1) não possua autovalores na origem, então, o sistema (3) é  $D$ -estabilizável se existir uma matriz simétrica  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$  que satisfaçam as LMIs:

$$\begin{aligned}
 & X > 0, \\
 & \begin{bmatrix} XA^T + AX + BYA^T + AY^T B^T & X + BY \\ X + Y^T B^T & -\frac{X}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \\
 & \begin{bmatrix} \frac{r}{2}(A^{-1}(X + BY) + (X + BY)^T(A^{-1})^T) & -X \\ -X & \frac{r}{2}(A^{-1}(X + BY) + (X + BY)^T(A^{-1})^T) \end{bmatrix} < 0, \\
 & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(XA^T + AX + BYA^T + AY^T B^T) & \cos(\theta)(XA^T + BYA^T - (AX + AY^T B^T)) \\ \cos(\theta)(XA^T + BYA^T - (AX + AY^T B^T)) & \text{sen}(\theta)(XA^T + AX + BYA^T + AY^T B^T) \end{bmatrix} \\
 & < 0. \tag{6}
 \end{aligned}$$

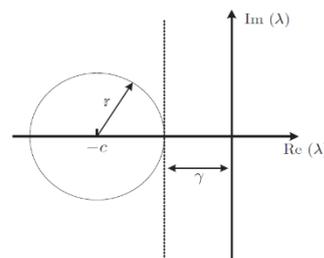
**Demonstração:** Vide (FARIA, 2009).

**Condições para a  $C$ -estabilidade  $(\gamma, r)$ .** Usando o método direto de Lyapunov foi verificado a existência de uma conexão entre a alocação de autovalores em uma região do semiplano complexo negativo considerando a existência de  $P = P^T > 0$ , satisfazendo a desigualdade

$$A^T P + PA + 2\gamma P + \frac{1}{r}(A + \gamma I)^T P(A + \gamma I) < 0, \tag{7}$$

sendo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz conhecida. Se (7) for factível, é possível garantir que todos os autovalores de  $A$  pertencem a uma taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma$  e a um disco de raio  $r$ , com centro em  $(-c, 0)$ , sendo  $c = \gamma + r$ . A Figura 3 ilustra a região de alocação de autovalores.

Figura 3—Alocação de autovalores considerando a região  $(\gamma, r)$ .



Fonte: Adaptado de (HADDAD, BERNSTEIN, 1992).

A partir de (7), o Lema 4 propõe condições necessárias e suficientes para a  $C$ -estabilização do sistema (3) utilizando a realimentação derivativa.

**Lema 4** Supondo que a matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  não possua autovalores na origem. Sejam  $\gamma > 0$  e  $r > 0$  números reais conhecidos, o sistema (3) é  $C$ -estabilizável, com ganho  $K = YX^{-1}$ , se existir uma matriz simétrica  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  satisfazendo as LMIs:

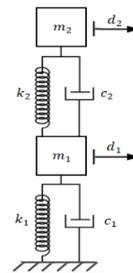
$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} AX + XA^T + AY^T B^T + BYA^T & \bullet & \bullet \\ XA^T + \gamma X + \gamma Y^T B^T & -rX & \bullet \\ X + Y^T B^T & 0_n & \frac{-X}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \\
 & X > 0. \tag{8}
 \end{aligned}$$

sendo • termos transpostos em uma matriz simétrica.

**Demonstração:** Vide (DA SILVA et al., 2012).

**Sistema de dois graus de liberdade.** O sistema de dois graus de liberdade que será controlado é um sistema massa-mola-amortecedor, composto por duas molas com coeficientes de rigidez  $k_1$  e  $k_2$ , duas massas  $m_1$  e  $m_2$  e dois amortecedores com coeficientes de amortecimento  $c_1$  e  $c_2$ . A representação do sistema pode ser vista na Figura 4.

Figura 4 –Modelo do sistema massa mola amortecedor.



Fonte: Adaptado de (REPINALDO, 2018).

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

O sistema mostrado na Figura 4, foi descrito na forma de espaço de estados para facilitar o estudo do comportamento dinâmico do sistema e é representado pela equação (9)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \{x(t)\} + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} \{u(t)\} + \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \{w(t)\} \quad (9)$$

sendo  $[A]$  a matriz de estados;  $[B]$  a matriz de entrada, fragmentada em  $[B_u]$ , que é a matriz de entrada de força de controle, e em  $[B_w]$ , que é a matriz de entrada da força de excitação. A matriz de saída é dada por  $[C]$ ;  $\{x(t)\}$  é o vetor de estados;  $\{u(t)\}$  é o vetor de entrada de força de controle;  $\{w(t)\}$  é o vetor de entrada de força de excitação;  $\{y(t)\}$  é o vetor de saída do sistema (REPINALDO, 2018, p. 29).

Ainda, foi feito também a representação do modelo matemático em coordenadas físicas dados pelas equações de (10) a (14).

$$\{x(t)\}_{2nx1} = \begin{cases} d(t)_{2nx1} \\ \dot{d}(t)_{2nx1} \end{cases} \quad (10)$$

$$[A]_{2nx2n} = \begin{bmatrix} [0]_{nxn} & [I]_{nxn} \\ [-[m]^{-1}[k]]_{nxn} & [-[m]^{-1}[c]]_{nxn} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[B_u]_{2nxnu} = \begin{bmatrix} [0]_{nxn} & [P_u]_{nxnu} \\ [m]^{-1}_{nxn} & [P_u]_{nxnu} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[B_w]_{2nxnw} = \begin{bmatrix} [0]_{nxn} & [P_w]_{nxnw} \\ [m]^{-1}_{nxn} & [P_w]_{nxnw} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[C]_{nsxn} = [[P_s]_{nsxn} [I]_{nxn} \quad [P_s]_{nsxn} [0]_{nxn}] \quad (14)$$

Sendo  $[P_u]$  a matriz de posicionamento da força de controle,  $[P_w]$  a matriz de posicionamento da força de excitação e  $[P_s]$  a matriz de posicionamento da saída (REPINALDO, 2018, p. 30).

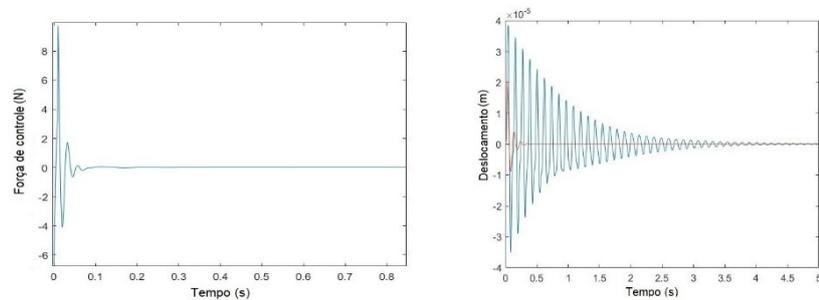
Os parâmetros do sistema são dados como  $m_1 = 4,38262 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1,93959 \text{ kg}$ ,  $c_1 = 21,66 \text{ N/m}$ ,  $c_2 = 0,607 \text{ N/m}$ ,  $k_1 = 22492,5 \text{ Ns/m}$ ,  $k_2 = 13100 \text{ Ns/m}$  e  $n = 2$  sendo o número de graus de liberdade. Para a resolução das LMIs foi utilizado o software MATLAB® juntamente com o solver SeDuMi (STURM, 1999, p. 625-653), e dessa forma foi possível sintetizar os controladores.

**Projeto com taxa de decaimento:** Utilizando as LMIs (5) com  $\gamma = 8$ , o controlador (15) foi projetado com restrição apenas na taxa de decaimento.

$$K_{TD} = [85,4010 \quad 123,2483 \quad -3,8067 \quad 0,8956] \quad (15)$$

Na Figura 5 pode ser visto o sinal da força de controle na esquerda e pode ser visto na direita os deslocamentos da massa 1 do sistema, com e sem controle.

Figura 5 – Sinal da força de controle e deslocamento da massa considerando a taxa de decaimento.



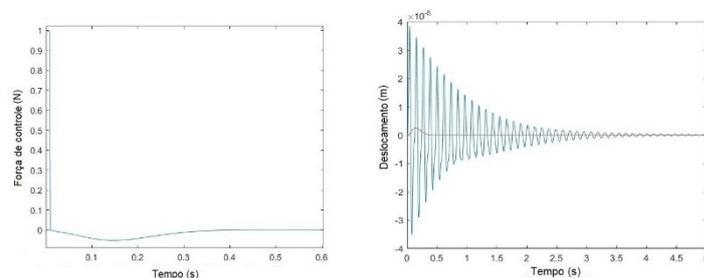
Fonte: Autoria Própria (2020).

**Projeto com a D-estabilidade:** Utilizando as LMIs (6) com  $\gamma = 12$ ,  $r = 30$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , o controlador (16) foi projetado a fim de assegurar a D-estabilidade do sistema.

$$K_D = 10^4 \times [5,3871 \quad -5,0265 \quad 0,0701 \quad -0,0466] \quad (16)$$

Na Figura 6 pode ser visto o sinal da força de controle na esquerda e pode ser visto na direita os deslocamentos da massa 1 do sistema, com e sem controle.

Figura 6 – Sinal da força de controle e deslocamento da massa considerando a D-estabilidade



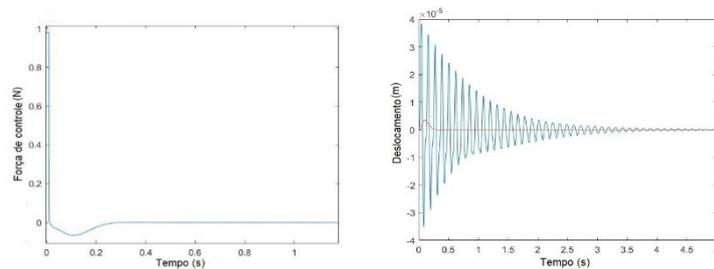
Fonte: Autoria Própria (2020).

**Projeto com a C-estabilidade:** Utilizando as LMIs (8) com  $\gamma = 8$  e  $r = 24$ , o controlador (17) foi projetado a fim de assegurar a C-estabilidade do sistema.

$$K_C = 10^4 \times [1,8128 \quad -1,5623 \quad 0,0152 \quad -0,0040] \quad (17)$$

Na Figura 7 pode ser visto o sinal da força de controle na esquerda e pode ser visto na direita os deslocamentos da massa 1 do sistema, com e sem controle.

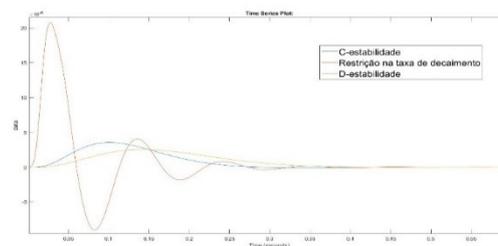
Figura 7 – Sinal da força de controle e deslocamento da massa considerando a  $C$ -estabilidade



Fonte: Autoria Própria (2020).

É observado que pelos três métodos de projeto via LMIs (Restrição na taxa de decaimento,  $D$ -estabilidade e  $C$ -estabilidade) foi possível fazer o controle do sistema de dois graus de liberdade, porém, existem vantagens de um em relação ao outro. Na Figura 8, é possível comparar, através de um zoom, as três respostas transitórias.

Figura 8: Comparação entre as respostas dos controladores.



Fonte: Autoria Própria (2020).

Pela Figura 8, observa-se que o método menos efetivo de projeto foi o com restrição apenas na taxa de decaimento, isso se deve ao fato de que a técnica apenas contribuiu exclusivamente para a velocidade de resposta do sistema e sua força de controle, vista na Figura 5, é muito maior do que as forças dos outros dois métodos. Uma vantagem da taxa de decaimento é a possibilidade de uma maior quantidade de projetos factíveis, pois é necessário a escolha inicial de apenas um parâmetro, o  $\gamma$ . Para o estudo em questão, a diferença entre a  $D$ -estabilidade e a  $C$ -estabilidade é muito pequena, a  $D$ -estabilidade alcançou o regime permanente um pouco depois da  $C$ -estabilidade, porém com menos *overshoot*.

## CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados três métodos diferentes para a síntese de controladores através de LMIs, aplicados no controle de vibração de um sistema de dois graus de liberdade. Em todos os projetos, utilizou-se da estratégia de realimentação derivativa, se mostrando eficiente no controle de sistemas que possuem sensores do tipo acelerômetros para mensurar os estados. Uma comparação entre as técnicas foi realizada, possibilitando apontar qual condição obteve melhores resultados para o estudo em questão. Cada técnica estudada tem suas vantagens, desvantagens e importância, dessa forma, através de ensaios, é possível escolher a técnica mais adequada para um dado projeto.

## REFERÊNCIAS

ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. Pole placement for SISO linear systems by state derivative feedback. **IEE Proceedings-Control Theory Applications**. v. 151, n. 4, p. 377-385, 2004.

ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. da; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. **International Journal of Control, Automation and Systems**, v. 80, n. 8, 2007.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. Linear matrix inequalities in systems and control theory. **SIAM Studies in Applied Mathematics**, v. 15, n. 2, 1994.

CHILALI, M.; GAHINET, P.  $H^\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach, **IEEE Transactions on Automatic Control**. v. 41, n. 3, p. 358-367, 1996.

FARIA, F. A. **Projetos de controladores baseados em LMI usando realimentação da derivada dos estados**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica). Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Ilha Solteira, 2009.

HADDAD, W.; BERNSTEIN, D. Controller design with regional pole constraints, **IEEE Transactions on Automatic Control**. v. 37, n. 1, p. 54-69, 1992.

REPINALDO, J. P. **Controle modal aplicado a uma estrutura de 2 graus de liberdade utilizando atuadores eletromagnéticos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, 2018.

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. F. Condições robustas para a D-estabilização de sistemas lineares politópicos usando a realimentação derivativa, CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 19., 2012, Campina Grande. **Anais...** Campina Grande: CBA, 2012.

STURM, J. **Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones**. Optimization Methods and Software 11-12: 625-653, 1999.