

## Filtragem estocástica não linear aplicada ao monitoramento de enchentes

## Non-linear stochastic filtering applied to flood level monitoring

### RESUMO

O objetivo desse trabalho é a implementação de filtros estocásticos não-lineares para aplicação em um sistema de monitoramento e estimativa de enchentes, cujo modelo matemático também é não linear. Para isso, realiza-se um estudo da teoria de filtragem estocástica, a partir do Filtro de Kalman (FK), até o Filtro de Kalman Estendido (FKE), o Filtro de Kalman *Unscented* (FKU), e o Filtro de Partículas (FP). Os estados a serem monitorados em um sistema de estimativa e monitoramento de enchentes são definidos a partir de três modelos matemáticos encontrados na literatura. Os três filtros estocásticos são implementados em MATLAB e as medições dos três modelos matemáticos são geradas via simulação. Quantifica-se o desempenho de cada um dos filtros através do RMSE e realiza-se um comparativo entre os filtros e os modelos trabalhados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Filtragem de kalman. Processo estocástico. Método de Monte Carlo. Enchentes.

### ABSTRACT

The purpose of this study is the implementation of non-linear stochastic filters applied to a system of flood level estimation and monitoring, for which the mathematical model is also non-linear. For this reason, a study on the stochastic filtering theory is carried, from the Kalman Filter (KF) to the Extended Kalman Filter (EKF), the Unscented Kalman Filter (UKF), and the Particle Filter (PF). The states to be monitored on a flood level estimation and monitoring system are defined in three different mathematical models found in the literature. The three stochastic filters are implemented using MATLAB and, for all mathematical models, the measurements are generated via simulation. The performance of each filter is quantified through RMSE and a comparative between the filters and mathematical models takes place.

**KEYWORDS:** Kalman filtering. Stochastic Process. Monte Carlo method. Flood.

Julia Zibetti Castilhos de Mello  
[juliazcmellos@gmail.com](mailto:juliazcmellos@gmail.com)  
Universidade Tecnológica Federal  
do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

Victor Baptista Frencl  
[ybfrencl@utfpr.edu.br](mailto:ybfrencl@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal  
do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

**Recebido:** 19 ago. 2020.

**Aprovado:** 01 out. 2020.

**Direito autorial:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

A filtragem estocástica é uma ferramenta matemática para a estimativa de estados em sistemas imersos em ruídos aleatórios. Para lidar com sistemas não lineares, é necessária a aplicação de filtros estocásticos adequados; nesse caso, derivações do Filtro de Kalman (FK), como o Filtro de Kalman Estendido (FKE) e o Filtro de Kalman *Unscented* (FKU). O Filtro de Partículas (FP) também é bastante utilizado nessas situações.

A aplicação de monitoramento e estimativa de enchentes foi escolhida pois permite observar, estudar e comparar diferentes métodos não lineares de filtragem estocástica, além de haver uma necessidade de se aplicar um sistema de prevenção e redução de danos de enchentes que seja eficaz no país, do qual, necessariamente, faz parte o monitoramento e estimativa de enchentes.

Algumas abordagens utilizando o FP para rastreamento de nível de enchente já foram realizadas, como em Ruslan *et al.* (2012) e Xu *et al.* (2017). Neste trabalho, entretanto, o FP será comparado com o FKE e o FKU para uma análise mais abrangente e detalhada do melhor desempenho para alguns modelos matemáticos não-lineares encontrados na literatura.

## FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO

O Filtro de Kalman (KALMAN, 1960) fornece estimativas de grandezas de um sistema representado em espaço de estados baseando-se em observações ruidosas deste mesmo sistema, obtidas através de medições. O FK, entretanto, só pode ser aplicado para sistemas lineares. Dessa forma, existe a necessidade de recorrer a derivações do próprio FK, além de outros tipos de filtros estocásticos não lineares.

O primeiro deles é o Filtro de Kalman Estendido (BAR-SHALOM *et al.*, 2004). Trata-se de uma generalização do FK que utiliza a série de Taylor para linearizar o sistema sobre pontos de operação bem definidos, de forma que a linearização é continuamente atualizada pelas previsões e estimativas de estado.

Considerando o modelo matemático não-linear representado em espaço de estados nas equações (1) e (2):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_k, t_k) + \Gamma(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{w}_k, \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{v}_k, \quad (2)$$

em que  $\mathbf{x}_k$  é o vetor de estados,  $\mathbf{z}_k$  são as observações ruidosas,  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\mathbf{h}$  e  $\Gamma$  são funções vetoriais,  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  correspondem às sequências gaussianas  $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$  e  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ , sendo  $Q_k > 0$  e  $R_k > 0$ , as equações do FKE para o estado previsto e a matriz de covariância do erro de previsão do estado são, respectivamente, dados pelas equações (3) e (4):

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}(k|k), k), \quad (3)$$

$$P(k+1|k) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}_k} P(k|k) \mathcal{F}_{\mathbf{x}_k}^T + Q_k, \quad (4)$$

em que  $\mathcal{F}_{\mathbf{x}_k}$  é a matriz jacobiana da função  $\boldsymbol{\varphi}$  avaliada em  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ .

A medida prevista e a matriz de covariância da inovação são dadas, respectivamente, por (5) e (6):

$$\hat{\mathbf{z}}(k+1|k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k+1|k), k+1), \quad (5)$$

$$S_{k+1} = \mathcal{H}_{\mathbf{x}_{k+1}} P(k+1|k) \mathcal{H}_{\mathbf{x}_{k+1}}^T + R_{k+1}, \quad (6)$$

em que  $\mathcal{H}_{\mathbf{x}_{k+1}}$  é a matriz jacobiana da função  $\mathbf{h}$  avaliada em  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$ .

O ganho do filtro é dado pela equação (7):

$$K_{k+1} = P(k+1|k) \mathcal{H}_{\mathbf{x}_{k+1}}^T S_{k+1}^{-1}. \quad (7)$$

A atualização do estado e a matriz do erro de estimativa são dadas, respectivamente, pelas equações (8) e (9):

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + K_{k+1} [\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}(k+1|k)], \quad (8)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K_{k+1} \mathcal{H}_{\mathbf{x}_{k+1}}^T] P(k+1|k). \quad (9)$$

### FILTRO DE KALMAN UNSCENTED

As aproximações do FKE estão suscetíveis a erros, tanto no valor esperado quanto nas matrizes de covariância obtidas pelo filtro, o que ocasionalmente pode acarretar em uma divergência do filtro estocástico. O Filtro de Kalman *Unscented* (JULIER; UHLMANN, 1997) visa atenuar esses problemas de aproximação.

O FKU é baseado na Transformação *Unscented* (TU), que tem como objetivo encontrar um conjunto de vetores determinísticos, denominados pontos-sigma, cuja média seja  $\bar{\mathbf{x}}$  e a covariância seja  $P_{xx}$  e aplicar a função não linear  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$  sobre cada ponto-sigma para obter os vetores transformados. Ela se fundamenta a partir da intuição de que é mais fácil de aproximar uma distribuição de probabilidade do que uma função ou transformação arbitrária não linear.

Para calcular o estado previsto, cria-se um conjunto de pontos-sigma  $\mathcal{X}_{k|k}^{(i)}$  com pesos  $W^{(i)}$ , conforme o conjunto de equações em (10):

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{k|k}^{(0)} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, & W^{(0)} &= \kappa / (n + \kappa), \\ \mathcal{X}_{k|k}^{(i)} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \left( \sqrt{(n + \kappa) P_{k|k}} \right)_{(i)}^T, & W^{(i)} &= 1/2(n + \kappa), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathcal{X}_{k|k}^{(i+n)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} - \left( \sqrt{(n + \kappa) P_{k|k}} \right)_{(i)}^T, \quad W^{(i+n)} = 1/2(n + \kappa).$$

em que  $\kappa \in \mathbb{R}^+$  e  $\left( \sqrt{(n + \kappa) P_{k|k}} \right)_{(i)}^T$  é a  $i$ -ésima linha de  $\sqrt{(n + \kappa) P_{k|k}}$ .

Em seguida, cada ponto é transformado pela função não linear de estado:

$$\mathcal{X}_{k+1}^{(i)} = \boldsymbol{\varphi}(\mathcal{X}_{k|k}^{(i)}, k). \quad (11)$$

O estado previsto é calculado pela soma ponderada dos pontos-sigma:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \mathcal{X}_{k+1}^{(i)}. \quad (12)$$

A matriz de covariância do erro de previsão do estado, por sua vez, é dada por:

$$P_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \left\{ \mathcal{X}_{k+1}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right\} \left\{ \mathcal{X}_{k+1}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right\}^T. \quad (13)$$

Para determinar a medida prevista, obtém-se outro conjunto de pontos-sigma  $\mathcal{X}_{k+1|k}^{(i)}$ , a partir dos estados previstos. Gera-se, portanto, o conjunto transformado:

$$\mathcal{Z}_{k+1|k}^{(i)} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1|k}^{(i)}, k). \quad (14)$$

A medida prevista é dada pela soma ponderada em (15):

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \mathcal{Z}_{k+1|k}^{(i)}. \quad (15)$$

A matriz de covariância da inovação e a matriz de covariância cruzada, utilizadas para calcular o ganho do filtro são dadas, respetivamente, por (16) e (17):

$$P_z = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \left\{ \mathcal{Z}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} \right\} \left\{ \mathcal{Z}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} \right\}^T. \quad (16)$$

$$P_{xz} = \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \left\{ \mathbf{x}_{k+1}^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \right\} \left\{ \mathcal{Z}_{k+1|k}^{(i)} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} \right\}^T. \quad (17)$$

O ganho do filtro, a ser utilizado nas equações de atualização (8) e (9), é dado pela equação (18):

$$K_{k+1} = P_{xz} P_z^{-1}. \quad (18)$$

## FILTRO DE PARTÍCULAS

O Filtro de Partículas é um filtro estocástico não linear sub-ótimo que realiza estimativas Monte Carlo Sequencial, baseadas na representação de densidades de probabilidade por pontos de massa, ou partículas. O FP utilizado nesse trabalho teve como base a fundamentação teórica apresentada em Ristic *et al.* (2004) e o filtro implementado em Tulsyan *et al.* (2016).

Para a aplicação deste trabalho foi utilizado um filtro SIR, do inglês *Sampling Importance Resampling*, que consiste em aproximar a função de massa de probabilidade utilizando um conjunto de amostras aleatórias associadas a pesos por importância. O algoritmo tem também um processo de reamostragem em toda iteração, de maneira a evitar a degeneração do algoritmo (DOUCET *et al.*, 2001).

A escolha da distribuição por importância foi feita de maneira sub-ótima, vide Ristic *et al.* (2004). O peso por importância é dado pela proporcionalidade em (19)

$$w_{k+1}^i \propto w_k^i p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}^i), \quad (19)$$

na qual  $p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}^i)$  é a função de verossimilhança da  $i$ -ésima partícula, calculada a partir da função densidade de probabilidade gaussiana relacionada a inovação  $\tilde{\mathbf{z}}$ :

$$p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}^i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det(R)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T R^{-1} \tilde{\mathbf{z}}\right). \quad (20)$$

## MODELOS MATEMÁTICOS

Foram utilizados três modelos distintos encontrados na literatura para a comparação de desempenho dos filtros estocásticos. As medições foram geradas via simulação computacional.

O primeiro modelo, apresentado em Ruslan *et al.* (2012), é um sistema em que o estado e as medidas são escalares. O modelo é utilizado, com sucesso, para estimar o nível de água, em metros, na represa Bekok, situada no estado de Johor, na Malásia. O modelo apresentado é

$$x_{k+1} = 0,5x_k + \frac{25x_k}{1+x_k^2} + 8 \cos(1,2k) + w_k, \quad (21)$$

$$z_k = 0,05x_k^2 + v_k, \quad (22)$$

em que os ruídos de medida e de processo possuem distribuição gaussiana com média nula e  $\sigma_w^2 = \sigma_v^2 = 1$ . A medida  $z_k$  equivale ao nível de água, em metros, no instante de tempo  $k$ .

O segundo modelo, apresentado por Romanowicz *et al.* (2006), leva em consideração um processo de alteração de nível de água devido à precipitação pluvial. O modelo em espaço de estados é dado por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = F\mathbf{x}_k + G\mathbf{u}_{k-\delta} + \mathbf{w}_k, \quad (23)$$

$$z_k = \mathbf{h}^T \mathbf{x}_k + v_k, \quad (24)$$

em que  $\mathbf{h}^T = [\mathbf{1} \quad \mathbf{1}]$  e, de acordo com os parâmetros de um dos pontos de medição,

$$F = \begin{bmatrix} 0,9711 & 0 \\ 0 & 0,8491 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0,0247 \\ 0,0424 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

e  $u_k$  é a precipitação efetiva, relacionada com a precipitação fluvial  $r_k$ , dada por:

$$u_k = c_0 c(z_k) z_k^\gamma r_k, \quad c(z_k) = \begin{cases} 1, & z_k < z_0 \\ c_p, & z_k \geq z_0 \end{cases} \quad (26)$$

em que  $c_0$  é uma constante de escala,  $0 < c_p \leq 1$  é a constante que descreve o grau de achatamento da onda de inundação,  $z_0$  é uma constante relacionada ao nível limite de cheia do banco de água e  $\gamma$  é um expoente relacionado à lei da energia. Para esse trabalho foram utilizados os parâmetros  $c_0 = 1$ ,  $\gamma = 0,1$ ,  $c_p = 0,72$ ,  $y_0 = 2,1$  e, por fim,  $\delta = 0$ , pois o FP considerado tem como hipótese um sistema markoviano.

O terceiro e último modelo foi obtido a partir do modelo diferencial da equação (27), apresentado por Duong *et al.* (1975):

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\left(\frac{1}{K_2}\right) K_1 N Q^{N-1} \frac{dQ}{dt} - \left(\frac{1}{K_2}\right) Q - \left(\frac{1}{K_2}\right) U. \quad (27)$$

Os parâmetros foram determinados com base em uma tempestade em abril de 1953 na bacia do rio Vermilion, nos Estados Unidos. Tais parâmetros valem  $K_1 = 19,99$ ,  $K_2 = 6,25$  e  $N = 1,18$ . O tempo para esse processo é dado em horas, o nível de água em polegadas e o escoamento e precipitação em polegadas por hora.

A partir do modelo matemático diferencial encontrado na literatura, foi obtido um modelo em espaço de estados para dois estados,  $x_{1k} = Q_k$  e  $x_{2k} = Q_{k-1}$ , utilizando-se o método de diferenças finitas para a obtenção de uma equação a diferenças e, a partir desta equação a diferenças, o modelo das equações em (28) a (30). O período de discretização escolhido foi  $T = 30s$ .

$$x_{1k+1} = \frac{1}{K_2 + T^2 K_1 N (x_{1k})^{N-1}} \left[ (2K_2 - T^2) x_{1k} - T^2 (x_{1k})^N - K_2 x_{2k} + T^2 u_k \right], \quad (28)$$

$$x_{2k+1} = x_{1k}, \quad (29)$$

$$z_k = x_{1k}. \quad (30)$$

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir da implementação em MATLAB, foram analisados RMSE (*root-mean-square error*) e as trajetórias das estimativas de cada filtro. O RMSE é dado por

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (z_j - \hat{z}_j)(z_j - \hat{z}_j)^T}{n}}, \quad (31)$$

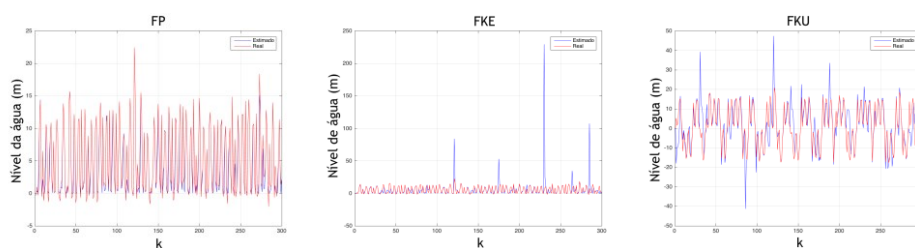
A Tabela 1 contém os resultados de cada filtro estocástico para os três modelos matemáticos, na qual  $N$  equivale ao número de partículas. Para o modelo 1, o FP apresenta um RMSE muito inferior em comparação às derivações do FK. A trajetória da medida simulada e da estimada por cada filtro para o modelo 1 estão na Figura 1.

Tabela 1 RMSE para os três modelos matemáticos.

	FP (N=200)	FP (N=1000)	FKE	FKU
<b>Modelo 1</b>	<b>1,51</b>	<b>1,45</b>	15,32	10,65
<b>Modelo 2</b>	2,61	0,81	<b>0,03</b>	<b>0,02</b>
<b>Modelo 3</b>	0,79	0,30	<b>0,10</b>	<b>0,10</b>

Fonte: Autoria própria (2020).

Figura 1 Estimativa para o modelo 1 para o FP, FKE e FKU.

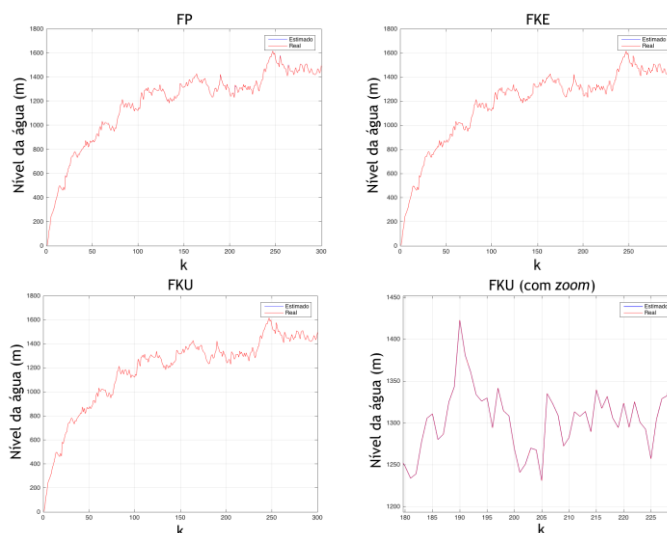


Fonte: Autoria própria (2020).

Para o primeiro modelo, o FP ofereceu as melhores estimativas, apresentando uma vantagem considerável em relação ao FKE e ao FKU, que pode ser observada através da análise dos erros. Além disso, o FP estimou com sucesso o sistema referente a esse modelo mesmo para um número de partículas baixo.

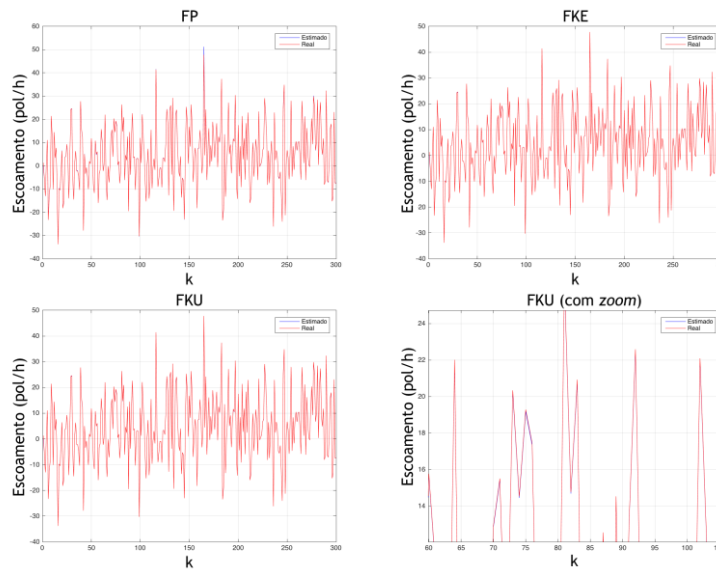
As Figuras 2 e 3, respectivamente, contém os gráficos da trajetória da medida para os modelos matemáticos 2 e 3, o FP contendo  $N = 1000$  partículas.

Figura 2 Estimativa para o modelo 2 para o FP, FKE e FKU.



Fonte: Autoria própria (2020).

Figura 3 Estimativa para o modelo 3 para o FP, FKE e FKU.



Fonte: Autoria própria (2020).

É possível observar a discrepância de resultados entre o modelo 1 e os demais modelos. Enquanto para o primeiro modelo o FP apresentou desempenho consideravelmente superior ao FKE e ao FKU, para os modelos 2 e 3 as derivações do FK apresentaram melhor desempenho do que o FP, o que aponta que, para esses modelos, é válida a hipótese de ruídos gaussianos para os filtros.

Algumas possíveis soluções para que o FP apresente um melhor desempenho para esses dois modelos é o aumento considerável no número de partículas ou a utilização de outras versões do FP, como o SIR Auxiliar ou o LLPF (*Local Linearization Particle Filter*), que conta com uma etapa de filtragem via FKE ou FKU para utilizar a escolha ótima dos pesos por importância (RISTIC *et al.*, 2004).

A escolha do filtro a ser utilizado nos modelos 2 e 3 passa a não ser tão simples. Dependendo da capacidade computacional a ser utilizada, o FP pode ser a melhor escolha. Por outro lado, levando em consideração uma capacidade computacional mediana, o FKE e o FKU – em especial, o segundo – apresentam bons resultados diante destas considerações.

## CONCLUSÃO

A aplicação de filtros estocásticos não-lineares para um modelo matemático não-linear de nível de água de enchente foi quantificada nesses resultados para os modelos matemáticos encontrados na literatura, permitindo uma comparação entre os filtros e o impacto de suas particularidades para cada modelo matemático.

Para trabalhos futuros, coloca-se a comparação de desempenho dos filtros estocásticos, formulados a partir dos modelos matemáticos aplicados a este trabalho, utilizando dados reais. É interessante também ampliar essa comparação para outros filtros estocásticos e outros modelos matemáticos que possam representar adequadamente o comportamento de uma enchente.

## REFERÊNCIAS

BAR-SHALOM, Y.; LI, X.; KIRUBARAJAN, T. **Estimation with applications to tracking and navigation: theory, algorithms and software**. 2004.

DOUCET, A.; FREITAS, N.; GORDON, N.; **Sequential Monte Carlo methods in practice**. New York: Springer, 2001.

DUONG, N.; WINN, C. B.; JOHNSON, G. R. Modern control concepts in hydrology. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, n. 1, p. 46–53, 1975.

JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. New extension of the kalman filter to nonlinear systems. **Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI**, Orlando, v. 3068, p. 182–193, 1997.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Journal of Basic Engineering, American Society of Mechanical Engineers**, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.

RISTIC, B.; ARULAMPALAM, S.; GORDON, N. **Beyond the Kalman filter-particle filters for tracking applications**. 2004.

ROMANOWICZ, R. J.; YOUNG, P. C.; BEVEN, K. J. Data assimilation and adaptive forecasting of water levels in the river Severn catchment UK. **Water Resources Research**, v. 42, n. 6, 2006.

RUSLAN, F. A.; ADNAN, R.; SAMAD, A. M.; ZAIN, Z. M. **Parameters effect in sampling importance resampling (SIR) particle filter prediction and tracking of flood water level performance**. 12TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL, AUTOMATION AND SYSTEMS. **Anais...**, p. 868–872. 2012.

TULSYAN, A.; GOPALUNI, B.; KHARE, S. Particle filtering without tears: a primer for beginners. **Computers & Chemical Engineering**, v. 95, p. 130-145, 2016.

XU, X.; ZHANG, X.; FANG, H.; LAI, R.; ZHANG, Y.; HUANG, L.; LIU, X. A real-time probabilistic channel flood-forecasting model based on the bayesian particle filter approach. **Environmental Modelling Software**, v. 88, p. 151 – 167, 2017.