

## Controle de um sistema torcional por realimentação dinâmica de saída

### Dynamic output feedback control of a torsional system

#### RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é realizar a síntese de controladores para um sistema torcional com dois graus de liberdade. A síntese é realizada pela aplicação de duas técnicas de estabilização via realimentação de saída baseados em desigualdades matriciais lineares, a primeira baseada na aplicação de transformações de similaridade e subsequente aplicação de restrições de estrutura sobre a condição de síntese, e a segunda consistindo de um procedimento de dois estágios, em que um ganho de realimentação de estados é obtido no primeiro estágio e aplicado na segunda etapa para cômputo do ganho de realimentação de saída. Os resultados, obtidos via simulação numérica, são comparados a fim de analisar o desempenho dos controladores sintetizados para cada uma das técnicas, e observa-se que o sistema controlado de fato é estabilizado pelos ganhos obtidos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sistemas de controle por realimentação. Desigualdades (matemática). Sistemas lineares de controle.

#### ABSTRACT

The main objective of this paper is to synthesize output-feedback controllers for application to a torsional system with two degrees of freedom. The synthesis is performed through the application of two output-feedback stabilization conditions stated as linear matrix inequalities, the first based on the application of similarity transformations and subsequent application of structure constraints over the synthesis conditions, and the second consists on a two-stage procedure, in which a state-feedback gain is obtained in the first stage and further used to compute the desired output-feedback controller. The results, obtained by numerical simulations, are compared to analyze the performance of the controllers obtained by both techniques, and it is observed that the controlled system is indeed stabilized by the proposed gains.

**KEYWORDS:** Feedback control systems. Inequalities (mathematics). Linear control systems.

**Otávio Tarumoto**

[otavio.taru@gmail.com](mailto:otavio.taru@gmail.com)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, PR, Brasil.

**Cristiano Marcos Agulhari**

[agulhari@utfpr.edu.br](mailto:agulhari@utfpr.edu.br)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, PR, Brasil.

**Recebido:** 19 ago. 2020.

**Aprovado:** 01 out. 2020.

**Direito autorial:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

Existem diversas aplicações na indústria para um sistema torcional, como por exemplo eixos de transmissão de máquinas rotativas, sistemas que utilizam de correias e engrenagens e até mesmo brocas de perfuração. O sistema utilizado no presente trabalho é um sistema torcional com dois discos, para que possua dois graus de liberdade (SINGH; RATTAN, 2003), (PARKS, 1999).

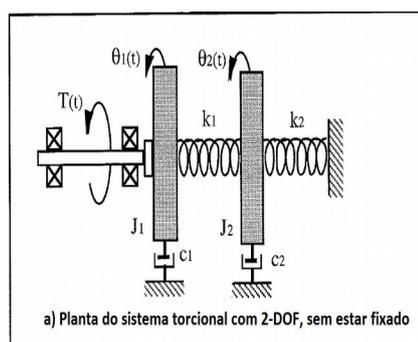
Em muitas aplicações, não é prático mensurar todos os estados diretamente e podemos mensurar somente as saídas correspondentes aos sensores disponíveis (OGATA, 2010). Quando for necessário projetar um compensador para um sistema, é interessante aplicar uma técnica que utiliza a saída do sistema caso não se tenha acesso a todos os estados por medida direta ou estimação. Porém ao se trabalhar com realimentação de saída, deve-se levar em conta que o trabalho se torna mais complexo de ser realizado (LEME, 2017), (PEAUCELLE; ARZELIER, 2001).

Para a síntese dos controladores duas técnicas foram selecionadas, onde uma delas se baseia em transformar todo o sistema para facilitar o cálculo do ganho, enquanto a outra se baseia em encontrar um ganho de realimentação de estados que será utilizado para calcular o ganho de saída. Ambas as técnicas são baseadas na resolução de LMIs (*Linear Matrix Inequalities*) (BOYD *et al.*, 1994). Este trabalho tem como objetivo realizar a síntese de controladores para o torcional com dois graus de liberdade, utilizando duas metodologias diferentes e comparando-as.

## MATERIAIS E MÉTODOS

O sistema torcional é composto por três discos que estão ligados através de uma haste flexível no centro de cada disco, e há um servo motor que aplica um torque no disco inferior, possibilitando o controle das posições ou velocidades angulares. A configuração que será utilizada nesse trabalho será com 2 graus de liberdade (DOF), conforme a Figura 1.

Figura 1 - Planta do sistema torcional com 2-DOF, sem estar fixado.



Fonte: Manual ECP (PARKS, 1999).

Na Figura 1,  $k_1$  e  $k_2$  são as constantes elásticas de mola dos discos 1 e 2,  $J_1$  e  $J_2$  são a inércia dos discos 1 e 2,  $c_1$  e  $c_2$  são as constantes de amortecimento dos discos 1 e 2,  $\theta_1(t)$  e  $\theta_2(t)$  são as posições dos discos 1 e 2, e por fim  $T(t)$  é o torque aplicado no disco 1.

A partir do diagrama de corpo livre dos discos 1 e 2, obtém-se a representação em espaço de estados do sistema na forma (1), com matrizes dadas nas Equações (2) e (3). Note que as saídas disponíveis para leitura são as posições angulares de ambos os discos.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (1)$$

$$x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_{d1}/J_1 & -c_{d1}/J_1 & k_{d1}/J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{d1}/J_2 & 0 & -(k_{d1}+k_{d3})/J_2 & -c_{d3}/J_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Com a obtenção da dinâmica do sistema, é possível agora aplicar as técnicas consideradas, baseadas na resolução de desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities* - LMIs) (BOYD *et al.*, 1994) para síntese dos ganhos de realimentação de saída (LEME, 2017). A Técnica 1 se baseia na aplicação de transformações de similaridade no sistema original e de restrições de estrutura em condições de estabilização. Por outro lado, a Técnica 2 se trata de uma técnica de dois estágios, em que um ganho de realimentação de estados é obtido no primeiro estágio e utilizado na segunda etapa para o cálculo do ganho de realimentação de saída. Ambas as técnicas são detalhadas na sequência.

A Técnica 1 é baseada na utilização de transformações de similaridade e consiste em aplicar, em todo o sistema, uma matriz de transformação de similaridade  $T$ , encontrada da seguinte forma:

$$T = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix} \in R^{n \times n} \quad (4)$$

A matriz  $Q$  é uma matriz arbitrária que garanta que  $T$  seja invertível. Com a equação  $x = T^{-1}\hat{x}$  é possível reescrever o sistema composto por (1) a (3) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (T^{-1}\dot{\hat{x}}) &= AT^{-1}\hat{x} + Bu \\ y &= CT^{-1}\hat{x} + Du \end{aligned} \quad (5)$$

Assim a dinâmica do sistema transformado depende de  $\hat{A} = TAT^{-1}$  e  $\hat{B} = TB$ . Utilizando a transformação (4), a matriz  $\hat{C}$  é igual a  $[I \ 0]$ , sendo, portanto, possível modelar o problema da síntese de um ganho de realimentação de saída como um problema de síntese de realimentação de estados. O ganho  $L_1$  para a realimentação de saída é encontrado através da resolução das seguintes LMIs:

$$W_0 = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad (6)$$

$$Z_0 = [Z_{11} \ 0], \quad (7)$$

$$\hat{A}W_0 + W_0\hat{A}^T + \hat{B}Z_0 + Z_0^T\hat{B}^T < 0, \quad (8)$$

Nas condições,  $W_0 = W_0^T \in R^{n \times n}$ ,  $Z_0 \in R^{m \times n}$ ,  $W_{11} \in R^{p \times p}$ ,  $W_{22} \in R^{(n-p) \times (n-p)}$  e  $Z_{11} \in R^{m \times p}$ . É importante ressaltar que a condição (8) é uma condição utilizada para síntese de ganhos de realimentação de estados (BOYD *et al.*, 1994), porém com a aplicação das restrições de estrutura (6) e (7) sobre o sistema transformado, é possível calcular um ganho estabilizante de realimentação de saída  $L_1 = Z_{11}W_{11}^{-1}$  (LEME, 2017).

A Técnica 2, por sua vez, é composta por duas etapas, onde a primeira etapa consiste em encontrar um ganho estabilizante de realimentação de estados  $K$  do sistema, sendo que a técnica utilizada para encontrar esse ganho pode afetar o resultado (PEAUCELLE; ARZELIER, 2001). Já a segunda etapa utiliza o ganho  $K$  encontrado na primeira etapa e aplica nas seguintes LMIs:

$$P > 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \Pi_{21} & -G - G^T & GB \\ \Pi_{31} & B^T G^T & -H - H^T \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

Sendo:

$$\Pi_{11} = A^T F^T + FA + K^T B^T F^T + FBK,$$

$$\Pi_{12} = P - F + A^T G^T + K^T B^T G^T,$$

$$\Pi_{13} = FB + C^T J^T - K^T H^T,$$

$$\Pi_{21} = P - F^T + GA + GBK,$$

$$\Pi_{31} = B^T F^T + JC - HK,$$

$P = P^T \in R^{n \times n}$ ,  $F \in R^{n \times n}$ ,  $G \in R^{n \times n}$ ,  $H \in R^{m \times n}$  e  $J \in R^{m \times p}$ . Com isso, o ganho estabilizante da realimentação de saída para o sistema é encontrado como  $L_2 = H^{-1}J$ . Mais detalhes da demonstração podem ser encontrados em (LEME, 2017). Neste trabalho, todos os procedimentos numéricos foram realizados pela utilização do software MATLAB, com os pacotes YALMIP e SeDuMi.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

As técnicas apresentadas foram aplicadas no sistema (1) a (3), considerando os valores tabelados no manual (PARKS, 1999) e gerando respectivamente os ganhos  $L_1$  e  $L_2$ , dados por

$$L_1 = [2.0133 \quad -1.2644] \quad (11)$$

$$L_2 = [3.4288 \quad -4.05] \quad (12)$$

O ganho  $L_1$  foi obtido pela aplicação da transformação de similaridade

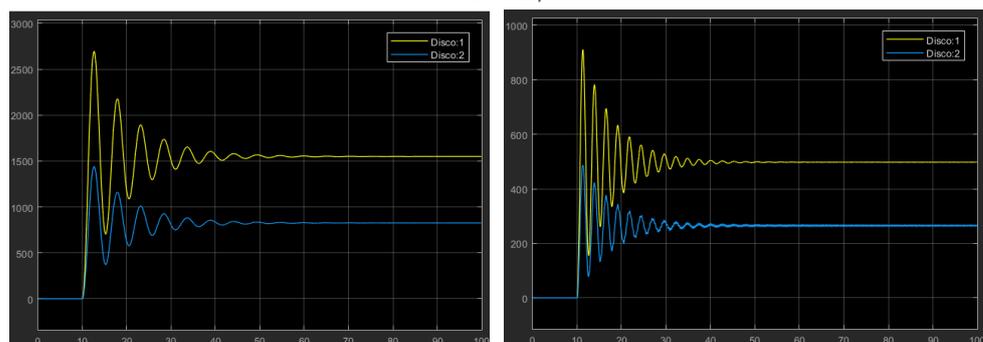
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

E o ganho  $L_2$  considerando o ganho de realimentação de estados

$$K = [3.5891 \quad -0.5165 \quad -4.3305 \quad 0.8518] \quad (14)$$

Os resultados obtidos via simulação numérica são mostrados na Figura 2. O controlador  $L_1$  teve um desempenho bem desejável, onde as posições dos discos foram estabilizadas em torno dos 60 segundos de simulação, apresentando uma oscilação mínima. Já o resultado obtido pela aplicação de  $L_2$  apresentou uma oscilação maior, mesmo que o tempo para que o sistema estabilize seja também em torno de 60 segundos. Ambas as técnicas almejam somente a estabilidade do sistema, então de acordo com a Figura 2, os resultados são considerados satisfatórios.

Figura 2: Resultados obtidos pela aplicação da Técnica 1 (à esquerda) e da Técnica 2 (à direita).



Fonte: Autoria própria (2020).

## CONCLUSÃO

Neste trabalho foi realizada a identificação de um sistema torcional para a síntese de controladores por realimentação de saída, através de duas técnicas distintas e a simulação desses controladores atuando no sistema torcional. Ambas as técnicas apresentaram resultados aceitáveis, pois o sistema simulado estabilizou nos dois casos. No entanto, para ambas as técnicas é necessário realizar análises anteriores, tanto para determinar a transformação de similaridade quanto o ganho de realimentação de estados no primeiro estágio, passos que consomem um tempo considerável para encontrar uma solução satisfatória. Por fim, não foi possível realizar os testes para realimentação dinâmica, porém os resultados obtidos indicam que a compensação dinâmica irá, no pior caso, resultar em desempenhos semelhantes aos obtidos pela compensação estática, porém com grande possibilidade de melhorar os resultados.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Cornélio Procopio, e ao LACOS – Laboratório de Controle e Otimização de Sistemas.

## REFERÊNCIAS

BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia, PA. SIAM, 1994.

LEME, P. V. **Controle por realimentação de saída de sistemas lineares a parâmetros variantes no tempo**. 2017. 44 f. Monografia (Especialização em Engenharia de Controle e Automação) – Faculdade de Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio, 2017.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2010.

PARKS, T. R. **Manual for model 205/205a torsional control system**. Educational Control Products, Woodland Hills, California, 1999.

PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. An efficient numerical solution for H2 static output feedback synthesis. In: 2001 European Control Conference – ECC, 2001, Porto, **Proceedings...** Porto: IEEE, 2001. p. 3800-3805.

SINGH, S.; RATTAN, K. S. Implementation of a fuzzy logic controller on an FPGA using VHDL. In: 22nd International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society - NAFIPS, 2003, Chicago, **Proceedings...** Chicago: IEEE, 2003. p. 110-115.