

## Otimização de treliças metálicas planas em perfil tubular circular

## Planar metallic trusses in circular tubular profile optimization

### RESUMO

**Priscila Mantuan Covalski**  
[priscilacovalski@alunos.utfpr.edu.br](mailto:priscilacovalski@alunos.utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

**Leandro Waidemam**  
[waidemam@utfpr.edu.br](mailto:waidemam@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

**Tatiane Cazarin da Silva**  
[tatianecazarin@utfpr.edu.br](mailto:tatianecazarin@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

O presente trabalho tem como objetivo modelar e implementar computacionalmente um algoritmo que determine a seção transversal ótima para treliças metálicas planas em perfil tubular circular, com o menor peso possível. A fim de estabelecer comparativos numéricos, duas análises foram realizadas. A primeira considera os critérios estabelecidos pela ABNT NBR 8800:2008 - Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios, e a segunda considera os critérios estabelecidos pela ABNT NBR 16239:2013 - Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações com perfis tubulares. Para a implementação do problema de minimização, foram utilizados o software MATLAB e sua biblioteca auxiliar *fmincon*. As restrições consideradas foram de força normal resistente, limitação do índice de esbelteza e deslocamentos máximos admissíveis. Os resultados obtidos demonstram redução significativa no peso da estrutural otimizada, comprovando a eficiência do algoritmo em determinar os pontos de mínimo local da função objetivo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Algoritmo computacional. Otimização estrutural. Programação não-linear.

### ABSTRACT

The present work aims to model and implement computationally an algorithm that determines the optimal cross section for planar metallic trusses in circular tubular profile, with the lowest possible weight. In order to establish numerical comparisons, two analyzes were performed. The first one considers the criteria established by ABNT NBR 8800: 2008 - Design of steel structures and mixed structures of steel and concrete in buildings, and the second one considers the criteria established by ABNT NBR 16239: 2013 - Design of steel structures and mixed structures of steel and concrete in buildings with tubular profiles. For the implementation of the minimization problem, MATLAB software and its auxiliary library *fmincon* were used. The restrictions considered were normal resistant strength, limitation of slenderness index and maximum permissible displacements. The results obtained demonstrate a significant reduction in the weight of the optimized structural, proving the efficiency of the algorithm in determining the local minimum points of the objective function.

**KEYWORDS:** Computational algorithms. Structural optimization. Nonlinear programming.

**Recebido:** 19 ago. 2020.

**Aprovado:** 01 out. 2020.

**Direito autoral:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

A otimização de estruturas metálicas tem sido tema de um grande número de estudos, sendo a obtenção de estruturas com menor massa e que atendam a critérios normativos um problema comum em projetos estruturais.

Diminuir os custos com a construção de estruturas tornou-se ainda mais importante com a globalização da economia. No caso de treliças, numa estrutura leve, de fácil e rápida execução, o menor custo será representado pelo menor peso que a treliça poderá ter (CORTÊS, 2002).

Segundo Oliveira e Falcón (2013), na concepção de projetos estruturais, todas as decisões tomadas pelos projetistas devem ser feitas de modo racional, de maneira a minimizar o consumo de material, maximizar sua confiabilidade ou facilitar sua produção, o que reflete significativamente nos custos. Portanto, dentre as inúmeras opções de soluções estruturais, escolhe-se aquela que é ótima e viável. Para isso, dispõe-se de técnicas de projeto ótimo que utilizam modelos matemáticos de modo a identificar a solução ótima de mínimo custo que não comprometa a funcionalidade e a segurança da estrutura.

Para Ribeiro (2008), problemas de otimização têm o objetivo de identificar as variáveis de projeto em situações em que se deseja maximizar ou minimizar uma função numérica de muitas variáveis, de modo a resolvê-las a fim de representar seus problemas e atender suas restrições na busca da solução. Assim, o emprego de técnicas de otimização conduz a um melhor entendimento no dimensionamento das estruturas, pois transforma o aspecto físico da estrutura em aspecto matemático, através de uma modelagem matemática da estrutura analisada.

De acordo com Kripka et. al (2013), as treliças possuem um vasto campo de aplicação na engenharia, sendo muito utilizadas na construção de pontes (rodoviárias e ferroviárias), como estruturas de cobertura (em residências, indústrias, estádios, etc.), em torres de transmissão de energia, entre diversos outros usos. São construídas usualmente em madeira ou aço, sendo relativamente leves e especialmente indicadas para superar grandes vãos ou suportar cargas elevadas. Nesse contexto, as treliças tornam-se uma solução econômica e prática.

Os avanços na tecnologia computacional tornaram possível ao engenheiro projetista a obtenção de um projeto otimizado não mais baseado na intuição e sim em um processo iterativo, a partir da identificação explícita da função objetivo a ser minimizada ou maximizada, bem como as variáveis e as restrições impostas ao algoritmo. Assim se faz o presente trabalho, com o intuito de buscar a solução ótima para problemas de otimização da seção transversal de treliças metálicas planas em perfil tubular circular por meio da minimização da função objetivo sujeita a restrições pré-estabelecidas em norma, através da utilização de algoritmos computacionais.

## DEFINIÇÃO DO PROBLEMA MATEMÁTICO

Segundo Souza e Fonseca (2008), o problema de otimização é definido pela minimização do peso da estrutura sujeita a tensões, deslocamentos e restrições de dimensão mínima dos elementos. Desta forma, com o objetivo de minimizar a

treliça como um todo e, uma vez definidas a função objetivo do problema e as restrições impostas pela ABNT NBR 8800:2008 e ABNT NBR 16239:2013, o problema de otimização da seção transversal de treliças metálicas planas em perfil tubular circular pode ser definido como:

Minimizar:

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = \rho_s \cdot \sum_{i=1}^n A_i \cdot L_i \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\max_{i=1, \dots, p} |u_i| \leq \delta_{\max} \quad (2)$$

a) para barras tracionadas:

$$N_{t, Sd} \leq N_{t, Rd} \quad (3)$$

$$L/r \leq 300 \quad (4)$$

b) para barras comprimidas:

$$N_{c, Sd} \leq N_{c, Rd} \quad (5)$$

$$KL/r \leq 200 \quad (6)$$

Sendo  $F$  a função objetivo, por unidade de massa;  $A$  a área da seção transversal da barra de treliça;  $L$  o comprimento da barra de treliça;  $\rho_s$  a massa específica do aço;  $u$  o vetor de deslocamentos nodais da treliça;  $\delta_{\max}$  o deslocamento máximo admitido;  $N_{t, Sd}$  a força axial de tração solicitante de cálculo;  $N_{t, Rd}$  a força axial de tração resistente de cálculo;  $r$  o raio de giração correspondente;  $K$  o coeficiente de flambagem da barra,  $N_{c, Sd}$  a força axial de compressão solicitante de cálculo e  $N_{c, Rd}$  a força axial de compressão resistente de cálculo.

## METODOLOGIA

Inicialmente definiu-se a função objetivo para o problema de minimização matemática, a qual discrimina as variáveis a serem otimizadas, levando em consideração a menor quantidade de material a ser utilizado para execução do projeto estrutural, consequentemente ocasionando um menor custo de produção. A minimização da função objetivo foi então restrita de acordo com os critérios estabelecidos pelas normas ABNT NBR 8800:2008 - Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios, e ABNT NBR 16239:2013 - Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações com perfis tubulares, em concordância com as dimensões mínimas necessárias, a força normal resistente, a limitação do índice de esbeltez e os deslocamentos máximos admissíveis.

A seguir um algoritmo computacional foi desenvolvido com o auxílio da rotina *fmincon*, presente na biblioteca de otimização do software MATLAB, utilizando o Método de Pontos Interiores como algoritmo de minimização. As configurações padrão da rotina *fmincon* foram mantidas, exceto pelo número máximo de avaliações de funções permitidas (30000), número máximo de iterações permitidas (10000) e tolerância para as variáveis (1e-10), alterados com o intuito de refinar os resultados.

Para a primeira análise são considerados os critérios de restrição abordados pela norma brasileira ABNT NBR 8800:2008, de forma que o valor do coeficiente de redução associado à resistência à compressão seja dado pelo item 5.3.3.1 da mesma norma. O intuito dessa simulação é de estabelecer um comparativo entre os resultados ótimos obtidos para a função objetivo através da minimização da seção transversal da treliça e os resultados obtidos através do dimensionamento por perfis comerciais.

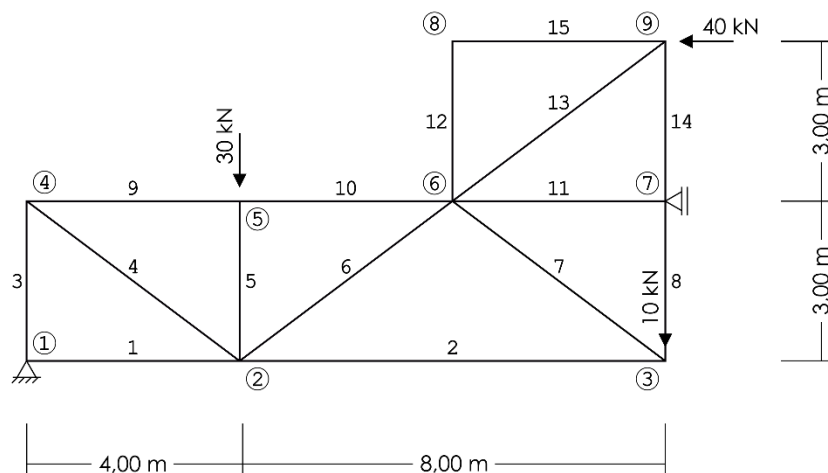
Os diâmetros comerciais foram definidos de acordo com Vallourec Soluções Tubulares do Brasil (20--). Para o dimensionamento por perfis comerciais, o algoritmo verifica o perfil catalogado de menor área que atenda às restrições estabelecidas por norma.

A segunda análise da treliça é realizada considerando os critérios de restrição estabelecidos pela ABNT NBR 16239:2013. Ressalta-se que o problema assume que a força de tração é transmitida diretamente para cada um dos elementos da seção transversal da barra por soldas ou parafusos em ambos os casos. Portanto, de acordo com o item 5.2.5 a) da ABNT NBR 8800:2008, o coeficiente de redução da área líquida é igual a 1, de maneira que a única diferença entre as duas normas passe a ser o cálculo do coeficiente de redução associado à compressão, para este caso dado pelo item 5.2 da ABNT NBR 16239:2013.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

As simulações numéricas foram realizadas em uma treliça plana e isostática, composta por 9 nós e 15 barras, sujeita a carregamentos concentrados de 10, 30 e 40 kN aplicados nos nós 3, 5 e 9 respectivamente, conforme a Figura 1, de forma que existam barras solicitadas por forças axiais de tração, barras solicitadas por forças axiais de compressão e barras não solicitadas. Admite-se que todos os nós da treliça são devidamente contraventados.

Figura 1 – Treliza plana e isostática composta por 9 nós e 15 barras



Fonte: Autoria própria (2020).

Os parâmetros de entrada são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros de entrada

| Parâmetro | Valor Adotado          |
|-----------|------------------------|
| $\rho_s$  | 7850 kg/m <sup>3</sup> |
| $E$       | 200 GPa                |
| $G$       | 77 GPa                 |
| $f_y$     | 250 MPa                |
| $f_u$     | 400 MPa                |

Fonte: Autoria própria (2020).

Em cada simulação é gerada uma matriz de valores ótimos de diâmetro e espessura para cada barra da treliça e uma matriz contendo os perfis comerciais dimensionados considerando a menor área da seção transversal para cada barra. Os resultados foram organizados nas Tabelas 2 e 3.

A eficiência de cada barra pode ser obtida através da razão entre a força axial de tração ou compressão solicitante de cálculo e a força axial de tração ou compressão resistente de cálculo, sendo 100% a eficiência ideal que uma barra pode apresentar, onde toda sua capacidade de resistência está sendo utilizada. As barras 11, 12 e 15 não apresentam um percentual de eficiência por não estarem solicitadas por forças axiais de tração ou compressão.

Tabela 2 – Área da seção transversal de acordo com a ABNT NBR 8800:2008

| Barra | Perfil Otimizado        |                | Perfil Comercial        |                |
|-------|-------------------------|----------------|-------------------------|----------------|
|       | Área (cm <sup>2</sup> ) | Eficiência (%) | Área (cm <sup>2</sup> ) | Eficiência (%) |
| 1     | 6,8970                  | 100,00         | 7,8490                  | 85,83          |
| 2     | 7,5757                  | 15,49          | 9,6472                  | 12,16          |
| 3     | 5,6915                  | 100,00         | 6,4126                  | 88,41          |



| Barra | Perfil Otimizado        |                | Perfil Comercial        |                |
|-------|-------------------------|----------------|-------------------------|----------------|
|       | Área (cm <sup>2</sup> ) | Eficiência (%) | Área (cm <sup>2</sup> ) | Eficiência (%) |
| 4     | 4,7282                  | 62,04          | 6,4126                  | 45,74          |
| 5     | 5,1699                  | 100,00         | 6,4126                  | 66,30          |
| 6     | 7,1013                  | 59,65          | 9,6472                  | 30,12          |
| 7     | 7,5323                  | 100,00         | 9,6472                  | 60,24          |
| 8     | 3,0360                  | 43,48          | 3,0360                  | 43,48          |
| 9     | 7,5921                  | 100,00         | 9,6472                  | 61,71          |
| 10    | 7,5921                  | 100,00         | 9,6472                  | 61,71          |
| 11    | 3,0360                  | -              | 3,0360                  | -              |
| 12    | 3,0360                  | -              | 3,0360                  | -              |
| 13    | 8,6235                  | 100,00         | 9,6472                  | 90,36          |
| 14    | 3,0360                  | 43,48          | 3,0360                  | 43,48          |
| 15    | 3,0360                  | -              | 3,0360                  | -              |

Fonte: Autoria própria (2020).

Tabela 3 – Área da seção transversal de acordo com a ABNT NBR 16239:2013

| Barra | Perfil Otimizado        |                | Perfil Comercial        |                |
|-------|-------------------------|----------------|-------------------------|----------------|
|       | Área (cm <sup>2</sup> ) | Eficiência (%) | Área (cm <sup>2</sup> ) | Eficiência (%) |
| 1     | 6,6529                  | 100,0          | 7,8490                  | 77,46          |
| 2     | 7,5757                  | 15,49          | 9,6472                  | 12,16          |
| 3     | 5,5132                  | 100,0          | 6,4126                  | 80,83          |
| 4     | 4,7282                  | 62,04          | 6,4126                  | 45,74          |
| 5     | 4,9867                  | 100,0          | 6,4126                  | 60,62          |
| 6     | 7,1013                  | 52,93          | 9,6472                  | 27,13          |
| 7     | 7,2400                  | 100,0          | 9,6472                  | 54,26          |
| 8     | 3,0360                  | 43,48          | 3,0360                  | 43,48          |
| 9     | 7,3545                  | 100,0          | 8,6708                  | 94,45          |
| 10    | 7,3545                  | 100,0          | 8,6708                  | 94,45          |
| 11    | 3,0360                  | -              | 3,0360                  | -              |
| 12    | 3,0360                  | -              | 3,0360                  | -              |
| 13    | 8,3184                  | 100,0          | 9,6472                  | 81,39          |
| 14    | 3,0360                  | 43,48          | 3,0360                  | 43,48          |
| 15    | 3,0360                  | -              | 3,0360                  | -              |

Fonte: Autoria própria (2020).

Por fim, na Tabela 4 pode-se observar o resultado obtido para a função objetivo de cada barra da treliça e a massa total da treliça considerando os critérios estabelecidos pela ABNT NBR 8800:2008 e ABNT NBR 16239:2013, para ambos perfis otimizados e perfis comerciais.

Tabela 4 – Comparação da massa da treliça entre normas e tipos de perfil

| Barra        | ABNT NBR 8800:2008             |                                | ABNT 16239:2013                |                                |
|--------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
|              | Perfil Otimizado<br>Massa (kg) | Perfil Comercial<br>Massa (kg) | Perfil Otimizado<br>Massa (kg) | Perfil Comercial<br>Massa (kg) |
| 1            | 21,6567                        | 24,6457                        | 20,8902                        | 24,6457                        |
| 2            | 47,5755                        | 60,5844                        | 47,5755                        | 60,5844                        |
| 3            | 13,4034                        | 15,1017                        | 12,9836                        | 15,1017                        |
| 4            | 18,5581                        | 25,1695                        | 18,5581                        | 25,1695                        |
| 5            | 12,1751                        | 15,1017                        | 11,7438                        | 15,1017                        |
| 6            | 27,8726                        | 37,8653                        | 27,8726                        | 37,8653                        |
| 7            | 29,5642                        | 37,8653                        | 28,4172                        | 37,8653                        |
| 8            | 7,14990                        | 7,14990                        | 7,14990                        | 7,14990                        |
| 9            | 23,8392                        | 30,2922                        | 23,0933                        | 27,2263                        |
| 10           | 23,8392                        | 30,2922                        | 23,0933                        | 27,2263                        |
| 11           | 9,53320                        | 9,53320                        | 9,53320                        | 9,53320                        |
| 12           | 7,14990                        | 7,14990                        | 7,14990                        | 7,14990                        |
| 13           | 33,8474                        | 37,8653                        | 32,6499                        | 37,8653                        |
| 14           | 7,14990                        | 7,14990                        | 7,14990                        | 7,14990                        |
| 15           | 9,53320                        | 9,53320                        | 9,53320                        | 9,53320                        |
| <b>Total</b> | <b>292,8473</b>                | <b>355,2993</b>                | <b>287,3932</b>                | <b>349,1674</b>                |

Fonte: Autoria própria (2020).

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados apresentados neste trabalho demonstram que o algoritmo computacional desenvolvido é eficiente em determinar os pontos de mínimo local que satisfazem a função objetivo do problema matemático definido, de maneira a atender aos critérios de restrição impostos pelas normas ABNT NBR 8800:2008 e ABNT NBR 16239:2013.

Analisando os valores obtidos através das simulações, pode-se concluir que a treliça dimensionada utilizando perfis otimizados e considerando os critérios estabelecidos pela ABNT NBR 8800:2008 resultou em uma redução em torno de 21,32% da massa total da treliça quando comparada a treliça dimensionada apenas por perfis comerciais. De forma análoga e considerando os critérios estabelecidos pela ABNT NBR 16239:2013, houve uma redução de 21,50% da massa total da treliça.

Ainda é possível observar uma pequena economia no consumo de material pela treliça dimensionada considerando os critérios de restrição abordados pela ABNT NBR 16239:2013 em comparação a ABNT NBR 8800:2008, uma vez que o fator de redução associado à resistência a compressão tende a resultar em um valor maior sempre que calculado de acordo com a ABNT NBR 16239:2013, influenciando diretamente no valor da força axial de compressão resistente de cálculo.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 8800**: projeto de estruturas de aço e estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro: ABNT, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 16239**: projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações com perfis tubulares. Rio de Janeiro: ABNT, 2013.

CORTÊS, Carlos Frederico Macêdo. **Otimização de Treliças Planas**. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil, Faculdade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

KRIPKA, Moacir; PRAVIA, Zacarias M. Chamberlain; DIAS, Maiga Marques; MEDEIROS, Guilherme Fleith de. Minimização do peso de treliças de alumínio pela otimização simultânea da seção transversal dos elementos e da geometria: análise numérica e validação experimental. **Revista Eletrônica de Engenharia Civil**. Goiânia, vol. 7, n. 2, p. 19-26, nov. 2013.

OLIVEIRA, Sérgio Rafael Cortes de; FALCÓN, Gines Arturo Santos. Otimização geométrica de treliças planas utilizadas em coberturas metálicas. **Vértices**. Campo dos Goytacazes, vol. 15, n. 2, p. 101-115, maio/ago. 2013.

RIBEIRO, Livia Maria Palácio. **Otimização e dimensionamento de treliças planas de madeira empregando o método dos algoritmos genéticos**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2008.

SOUZA, Rodrigo Pruença de; FONSECA, Jun Sergio Ono. Optimum Truss Design under Failure Constraints Combining Continuous and Integer Programming. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING OPTIMIZATION, 2008, Rio de Janeiro. **Proceedings** [...]. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 2008. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/30288/000658035.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 20 ago. 2020.

VALLOUREC SOLUÇÕES TUBULARES DO BRASIL. **Tubos Estruturais**: Seção Circular, Quadrada e Retangular. Catálogo Técnico. Belo Horizonte. [20--]. Disponível em: [http://www.aecweb.com.br/cls/catalogos/20437/24987/catalogo\\_estruturais\\_vallourec.pdf](http://www.aecweb.com.br/cls/catalogos/20437/24987/catalogo_estruturais_vallourec.pdf). Acesso em: 07 out. 2020.