

Estatística e Matemática Aplicada na análise de dados agrícolas

Statistic and applied math in agricultural data analysis

RESUMO

Anderson Alves Miguel
Ander.alves.miguel123@outlook.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Araceli Ciotti de Marins
araceli@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Luiz Gabriel Martins
luizgabrielmartins2014@hotmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Rodrigo Matheus Ritter
ritter.rodrigo4@gmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

O presente trabalho teve como objetivo obter um modelo matemático que descrevesse a perda de água do solo em função da densidade do solo e da intensidade da chuva, bem como obter uma solução analítica, que representasse tal situação. Foram utilizados os modelos de regressão linear múltipla e o modelo de escoamento, baseado em equações diferenciais. O coeficiente de determinação obtido com o modelo de regressão foi classificado como moderado, visto que seu valor foi de aproximadamente 0.32, indicando que o modelo aproxima 32% dos dados. Contudo, considerando as intensidades de chuva entre 1 à 4 mm/h foi possível obter um novo modelo que aproximou 60% dos dados. Quanto a solução analítica do modelo de escoamento, foi possível obtê-la, porém, a mesma apresentou parâmetros complexos para serem obtidos nesse momento, considerando os dados disponíveis.

PALAVRAS-CHAVE: Intensidade da chuva. Densidade do solo. Modelagem. Regressão.

ABSTRACT

The objective of the present study was to obtain a mathematical model that would describe the loss of water as a function of the bulk density and intensity of rainfall, as well as to obtain an analytical solution, that would represent such a situation. Multiple linear regression models were used and the flow model, based on differential equations. The coefficient of determination obtained with the regression model was classified as moderate, since its value was approximately 0.32, indicating that the model approximates 32% of the data. However, considering the rain intensities between 1 to 4 mm/h it was possible to obtain a new model that approximates 60% of the data. For the analytical solution of the flow model, it was possible to obtain it, however, it presented complex parameters to be adjusted at that moment, considering the available data.

KEYWORDS: Rain Intensity. Soil density. Modeling. Regression.

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autorial: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

A modelagem matemática tem sido estudada em diversas áreas científicas, dentre elas as ciências agrárias. Nessa vasta área do conhecimento há inúmeros estudos de modelos matemáticos que prestam auxílio no momento de tomada de decisões, sejam elas de precaução, ação ou para gerar estimativas.

Um modelo matemático para Almeida, Silva e Vertuan (2012)

[...] consiste em um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre outro.

Os modelos matemáticos podem ser classificados em modelos empíricos, que são baseados apenas em dados observados, modelos mecânicos, que consideram as leis físicas, químicas e biológicas no processo e os modelos estocásticos, que são descritos pela lei da probabilidade. Existem ainda os modelos de simulação que se dividem em determinísticos e estocásticos. Essas duas características podem ainda dividir os modelos de simulação em mecânicos, que procuram descrever os mecanismos envolvidos no processo, e funcionais, que descrevem apenas os aspectos gerais do processo.

Neste trabalho, os modelos matemáticos estudados são classificados como mecânicos, que são os modelos baseados em equações diferenciais e regressões lineares múltiplas.

Sendo assim, o objetivo deste trabalho foi construir um modelo matemático que descrevesse a perda de água da chuva em função da densidade do solo e da intensidade real de chuva assim como obter a solução analítica da equação diferencial que descreve o escoamento superficial da água da chuva sob uma superfície.

MATERIAL E MÉTODOS

Para o desenvolvimento do presente trabalho, foram utilizados dados referentes aos tratamentos que correspondem às coberturas vegetais com milheto, aveia preta e aveia preta com ervilha forrageira, respectivamente, referentes à pesquisa que originou a dissertação de Chang (2019). Os dados analisados nesse estudo são referentes ao solo não compactado, com a intenção de obter uma melhor aproximação da realidade.

Na pesquisa, inicialmente foram escolhidos 15 tipos de coberturas vegetais (tratamentos), sendo cada um desses tratamentos cultivados em uma determinada área com solo compactado e não compactado.

Para esse estudo, as variáveis independentes analisadas foram a densidade do solo, visto que em cada tratamento as densidades eram distintas, e a intensidade de chuva. Essa escolha se dá pelo fato de que são essas variáveis que mais influenciam na perda de água, solo e nutrientes (CHANG, 2019).

Para o processo de modelagem estatística, foi utilizado o *Software R Stúdio*, versão 1.3.1056 para efetuar a regressão, assim como o *Software Gnuplot* versão 5.2, ambos livres, para a construção dos gráficos.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para o processo de modelagem com um modelo de regressão linear múltipla, foi considerado o modelo de perda de água, ajustado à uma função polinomial do 1º grau de duas variáveis:

$$P. \text{ água}(Ds, Int) = a * Ds + b * Int + c, \quad (1)$$

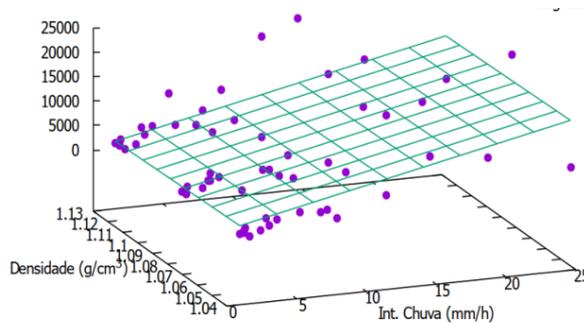
em que Ds é a densidade do solo (g/cm^3), Int é a intensidade da chuva (mm/h), $P. \text{ água}$ é a perda de água (L/ha), a , b e c são os parâmetros para ajuste do modelo de Regressão.

Os parâmetros a , b e c foram obtidos por meio de regressão linear múltipla e dessa forma foi possível estimar um modelo ajustado para (1), que é representado por (2):

$$P. \text{ água}(Ds, Int) = -9645,1Ds + 611,3Int + 12611 \quad (2)$$

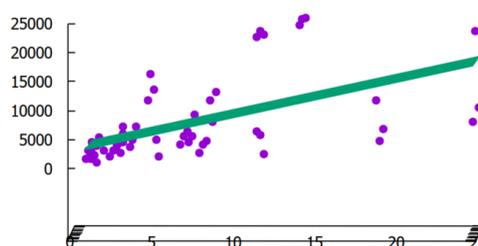
Na sequência, com o auxílio do *Software Gnuplot*, foi possível construir o gráfico de (2), como ilustra a figura 1 (a e b):

Figura 1a - Perda de água do solo em função da densidade e da chuva



Fonte - Dos autores, (2020).

Figura 1b - Perda de água em função da densidade e da chuva-outro ângulo



Fonte - Dos autores, (2020).

Calculando o Coeficiente de Correlação linear de Pearson (R^2) do modelo ajustado, obteve-se como resposta $R^2 \approx 0,32$, que é classificada como correlação linear moderada de acordo com Fonseca e Martins (1996), sugerindo que o percentual de dados que são explicados pelo modelo é aproximadamente 32%. Esse baixo valor do R^2 está associado a alta variabilidade dos dados coletados e

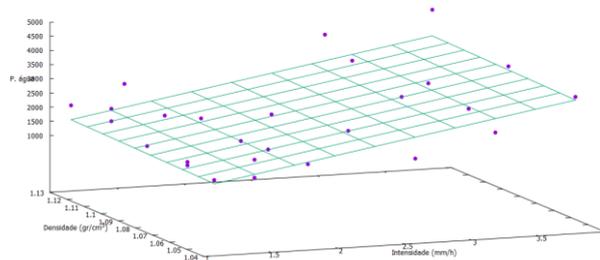
também pela coleta ser à campo, onde o ambiente não pode ser controlado (CHANG, 2019).

Contudo, ao analisar o gráfico expresso na figura 1 (a e b) por um outro ângulo, pôde-se notar que o modelo linear demonstrou boa aproximação considerando a intensidade de chuva entre 1 à 4 mm/h. Fazendo uma nova regressão múltipla linear com esse conjunto reduzido de dados obteve-se a função apresentada em (3):

$$P. \text{ água}(Int, Ds) = 804,1Int + 1841,2Ds - 1311,9 ; \quad (3)$$

Ao calcular o coeficiente de determinação, obteve-se $R^2 \approx 0,6$, que indica que aproximadamente 60% dos dados são explicados pelo novo modelo obtido.

Figura 2 - Intensidade chuva entre 1 à 4 mm/h



Fonte - Dos autores, (2020).

Uma forma de interpretar a perda de água do solo é pensar na diferença entre a quantidade total de água da chuva e a quantidade de água infiltrada. Dessa forma obtém-se a perda de água, ou também o escoamento superficial. Assim, a equação do modelo de escoamento apresentada por Tao, Wu e Wong (2017) é dada por:

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = r_e(t) - f(t), \quad (4)$$

em que $q(x, t)$ é a descarga unitária (fluxo de água) (cm^2/min^{-1}), $h(x, t)$ é a altura do escoamento (cm), $r_e(t)$ é a intensidade real de chuva (cm/min^{-1}) e $f(t)$ é a taxa de infiltração (cm/min^{-1}).

Para simplificar e desenvolver a equação (4), se tornou necessário o conhecimento da equação de Phillip (1955) e a equação da onda cinemática unidimensional.

A equação de Phillip é uma equação que descreve a taxa de infiltração de água no solo e inicialmente é apresentada como:

$$f_c(t) = \frac{1}{2} S t^{-\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

em que S, é o coeficiente de adsorção, sendo tratado como uma constante.

No momento em que a chuva se inicia, isto é, momento anterior ao escoamento, a capacidade de chuva é igual a capacidade de infiltração. No momento em que o solo chega ao seu limite de capacidade de infiltração, denominado tempo de empoçamento (t_p), inicia-se o processo de empoçamento. Assim, quando o tempo de chuva é superior ao tempo de empoçamento ($t > t_p$), tem-se que:

$$f(t) = f_c(t - \Delta t) = \frac{1}{2}S(t - \Delta t)^{-1/2}, \quad (6)$$

De forma geral, a equação de Phillip pode ser resumida como mostra a equação (6):

$$f(t) = \begin{cases} r_e(t), & t \leq t_p \\ \frac{1}{2}S(t - \Delta t)^{-1/2}, & t > t_p \end{cases} \quad (7)$$

sendo $\Delta t = \left(\frac{3}{16}\right) \cdot \left(\frac{S}{r_e}\right)^2$, segundo Tao, Wu e Wang (2017).

As ondas cinemáticas descrevem os escoamentos em que as forças de pressão e as forças de inércia não são importantes (GOMES, 2006). Sendo assim, no modelo da onda cinemática o modelo não possui aceleração relevante e com as forças de pressão e inércia desprezadas a equação da quantidade de movimento assume a sua forma mais simplificada possível dada por:

$$S_0 = S_f, \quad (8)$$

na qual S_0 representa a declividade do canal e S_f representa a declividade na linha de energia.

A equação (8), juntamente com a equação da continuidade, representada por (9), constitui a formação básica da propagação de uma onda cinemática, como mostra a equação (10):

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = 0 \\ S_0 = S_f \end{cases} \quad (10)$$

sendo $A(x, t)$ a área de seção transversal do canal (m^2) e $Q(x, t)$ o fluxo do canal ($m^3 t^{-1}$).

Como a equação (8) é dependente de $A(x, t)$ e $Q(x, t)$, o que torna a solução bastante complexa, se torna necessário utilizar a equação de Manning (CHOW, 1959), como mostra a equação (10), que é utilizada para calcular a velocidade da água em canais abertos e tubulações.

$$C = \frac{1}{n}R^{1/6}, \quad (11)$$

em que n é o coeficiente de rugosidade da parede (s) e R é o raio hidráulico (m).

O desenvolvimento que segue, foi baseado no apresentado por Chang (2019). Utilizando a equação (11), juntamente com a equação (8) obtém-se a seguinte igualdade:

$$S_f = \frac{Q(x, t)^2 n^2}{A(x, t)^2 R^{4/3}}, \quad (12)$$

Multiplicando a equação (12) em ambos os lados por $A(x, t)^2$, dividindo, também em ambos os lados, por S_f e na sequência chamando $R = \frac{A(x, t)}{P}$, sendo P o perímetro molhado (m), tem-se:

$$A(x, t) = \frac{Q(x, t)n}{\sqrt{S_f} \left(\frac{A(x, t)^{2/3}}{P^{2/3}} \right)}, \quad (13)$$

Multiplicando a equação (12) por $A(x, t)^{2/3}$ e na sequência reorganizando a equação obtida após essa multiplicação, assim como substituindo $S_f = S_0$ para o fluxo superficial e sendo P igual à largura B do canal, a equação (13) na equação (14):

$$A(x, t) = \left(\frac{\sqrt{S_0}}{nB^{2/3}} \right)^{-3/5} \cdot Q(x, t)^{3/5}, \quad (14)$$

Denotando por $\alpha = \left(\frac{\sqrt{S_0}}{nB^{2/3}} \right)^{-3/5}$ e $\beta = \frac{3}{5}$, a equação (14) pode ser reescrita como mostra a equação (15):

$$A(x, t) = \alpha Q(x, t)^\beta \quad (15)$$

A equação (15) representa a equação da onda cinemática unidimensional simplificada que contém a Fórmula de Manning, como descrito em Gomes (2006).

Com as informações obtidas através das equações de Phillip e do modelo de onda cinemática unidimensional, se torna possível desenvolver e simplificar a equação (4) a fim de se obter a solução analítica da mesma. Considerando a variação da profundidade do escoamento sendo proporcional ao excesso de chuva ($r_e(t) - f(t)$), tem-se que:

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = c(r_e(t) - f(t)), \quad (16)$$

sendo c uma constante de proporcionalidade.

Segundo o processo de resolução utilizado por Chang (2019), substituindo a equação (16) em (4) obtém-se:

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = (1 - c)(r_e(t) - f(t)) \quad (17)$$

A equação (17) representa a equação da onda cinemática simplificada.

Com as informações obtidas até o momento, é possível montar um problema de valor inicial e de contorno (P.V.I.C), como segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = (1 - c)(r_e(t) - f(t)) \\ q(x, 0) = 0 \\ q(0, t) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

sendo que $q(x, 0)$ representa a condição inicial e $q(0, t)$ representa a condição de contorno.

Para trabalhar na solução de (18), é interessante separar o tempo em antes e depois do escoamento. Primeiramente considerando $t \leq t_p$, a intensidade da chuva é equivalente à taxa de infiltração, segundo a equação de Phillip, logo, da equação (17) tem-se

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

Em (19), é possível constatar que não ocorre o escoamento superficial, pois o tempo de chuva não ultrapassou o tempo de empoçamento, sendo assim uma observação trivial, não tendo significância para o estudo.

Considerando agora $t > t_p$, que é de fato o interesse do estudo, com a equação (17) e a condição de contorno, a derivada parcial foi aproximada ao gradiente de comprimento l obtendo assim:

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \approx \frac{\Delta q(x, t)}{\Delta x} = \frac{q(l, t) - q(0, t)}{l - 0} = \frac{q(l, t)}{l} \quad (20)$$

Sendo l o comprimento do declive (cm).

Simplificando as notações, consideremos $q_l(t) = q(l, t)$. Substituindo as equações (7), referente à $t > t_p$, e (20) em (18), em seguida multiplicando ambos os lados da equação por l obtém-se:

$$q_l(t) = l(1 - c) \left(r_e(t) - \frac{1}{2} S(t - \Delta t)^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (21)$$

na qual, $q_l(t)$ representa a descarga ou fluxo unitário na saída.

Utilizando a equação (14), que contém a fórmula de Manning e substituindo $A(x, t)$ e $Q(x, t)$ por $h(x, t)$ e $q(x, t)$ respectivamente, tem-se:

$$h(x, t) = \left(\frac{\sqrt{S_0}}{nB^{2/3}} \right)^{-3/5} \cdot q_l(t)^{3/5} \quad (22)$$

Na equação (21), fazendo $S_0 = J$ e $x = l$, para fins de simplificação, e na sequência substituindo a equação (20) em (21), chega-se em:

$$h_l(t) = \left(\frac{\sqrt{J}}{nB^{2/3}} \right)^{-3/5} \cdot l(1 - c) \left(r_e(t) - \frac{1}{2} S(t - \Delta t)^{-\frac{1}{2}} \right)^{3/5} \quad (23)$$

A equação (22) representa a solução analítica para o P.V.I.C descrito pela equação (17) quando $t > t_p$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o modelo de ajuste de regressão linear foi possível determinar uma função com correlação moderada. Contudo, considerando as intensidades entre 1 à 4 mm/h foi possível obter um outro modelo via regressão múltipla linear, que explica aproximadamente 60% dos dados. Quanto à equação que representa a perda de água no solo, ou escoamento superficial, foi possível desenvolvê-la a fim de determinar sua solução analítica. Contudo, a solução analítica contém vários parâmetros que apresentam certo grau de dificuldade e com os dados disponíveis não foi possível aplicá-la para efeito de comparação com os dados reais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à UTFPR- câmpus Toledo por toda a assistência prestada bem como todos os professores e colegas que prestaram auxílio para o desenvolvimento do presente trabalho. Ao Pablo Chang e seu orientador, Professor Deonir Secco, por terem cedido parte dos dados para a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. L.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

CHANG, P. **Modelagem matemática de perdas de água, solo e nutrientes em latossolo argiloso sob sistemas de uso e manejo**. 2019. 119p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Energia na Agricultura) Universidade do Oeste do Paraná, Unioeste, Cascavel. 2019.

CHOW, V. T.; **Open-channel hydraulics**. New York, 680p. 1959.

FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. **Curso de Estatística**. 6. Ed. São Paulo, SP: Atlas, 1996.

GOMES, V. U.; **Estudo comparativo dos modelos de onda cinemática e onda difusiva na análise de propagação de cheias, em função dos parâmetros hidráulicos da bacia**. 2006. 89p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)- Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2006.

PHILLIP, J. R.; Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration-dependent. **Transactions of the Faraday Society**, United Kingdom, v.51, p.885-892, 1955.

TAO, W.; WU, J.; WANG, G. Mathematical model of sediment and solute transport along slope land in diferente rainfall patern condicions. **Scientific Reports**, London, v. 7, 2017.