

Análise e projeto de um controlador fuzzy TS via LMIs para levitação magnética

Analysis and design of TS fuzzy controller via LMIs for magnetic levitation

RESUMO

Este artigo aborda a metodologia *fuzzy* Takagi-Sugeno para representação de sistemas dinâmicos não lineares e a síntese de um controlador PDC (do inglês, *Parallel Distributed Compensation*) via LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*), com avaliação de estabilidade, taxa de decaimento e restrições da entrada e da saída, para um sistema levitador magnético. Resultados satisfatórios foram obtidos considerando diferentes critérios de projeto nas condições das LMIs, denotando a relevância da técnica estudada para sistemas não lineares.

PALAVRAS-CHAVE: Levitador magnético. Sistema realimentado. Desigualdades Matriciais Lineares.

ABSTRACT

This paper address the *fuzzy* Takagi-Sugeno methodology for the representation of non-linear dynamic systems and the synthesis of PDC controller (Parallel Distributed Compensation) via LMIs (Linear Matrix Inequalities) guaranteeing stability, decay rate, input and output constraints for a magnetic levitator system. Satisfactory results were obtained considering different design criteria under the LMIs conditions, denoting the relevance of the studied technique for non-linear systems.

KEYWORDS: Magnetic levitator. Feedback system. Linear Matrix Inequalities (LMIs).

Camila Rodrigues

camilarodrigues@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil.

Willian R. B. M. Nunes

willianr@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil.

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

Um dos papéis da engenharia é proporcionar melhor qualidade de vida através construção e otimização de sistemas baseando-se na evidência de fenômenos naturais. Um desses fenômenos é a levitação magnética com aplicações em sistemas como o Maglev (comboio de levitação magnética para transporte de pessoas e mercadorias) (LENG *et al.*, 2019), os corações artificiais magnéticos (utilização de levitação magnética para diminuir atritos, fricções e a necessidade por lubrificantes) (QIAN *et al.*, 2006), entre outros.

Devido o sistema de levitação magnética ser naturalmente instável é imprescindível a presença de um sistema de controle que garanta ao menos a estabilidade. Esse controlador pode ser um clássico PID (Proporcional-Integrador-Derivativo), embora possua limitações. Neste sentido, faz-se necessário o uso de técnicas de controle moderno. Entre tais, uma abordagem interessante é o *fuzzy* Takagi-Sugeno (TAKAGI; SUGENO, 2019) via LMIs, que sintetiza um controlador via otimização convexa, garantindo estabilidade, velocidade de resposta, restrição de entrada e saída do sistema (ATAŞLAR-AYYILDIZ; KARAHAN, 2019; SUN *et al.*, 2019), bem como robustez em caso de distúrbios (SONG *et al.*, 2019), entre outros critérios.

A seguinte terminologia foi adotada neste trabalho: \mathbb{R} é o conjunto dos números reais; $x(t) = x$, e quando $x(t)$ estiver explícito será para enfatizar a dependência no domínio do tempo; $\mathbb{K}_r = \{1, 2, \dots, r\}$ é o conjunto de número inteiros positivos, cujo maior elemento positivo é r .

METOLOGIA

Representação de sistemas não-lineares com modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno

Considere um sistema descrito em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a ação de controle, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Em geral, sistemas físicos apresentam não-linearidades em sua modelagem. Neste caso, a teoria clássica de controle fica limitada a uma linearização em torno de um ponto de operação. Uma forma metódica de lidar com as funções não-lineares de um sistema dinâmico é empregar a técnica *fuzzy* Takagi-Sugeno. E a partir desta, realiza-se a síntese do controlador PDC (do inglês, *Parallel Distributed Compensation*), que consiste em uma combinação convexa de controladores lineares.

A teoria *fuzzy* permite atribuir graus de pertinência para cada situação. A modelagem *fuzzy* Takagi-Sugeno se caracteriza pelo conjunto de regras Se-Então, tal que a i -ésima regra da modelagem *fuzzy* TS para um sistema dinâmico é

$$\text{Regra } i: \begin{cases} \text{Se} & z_1(t) \text{ é } \Omega_1^i, z_2(t) \text{ é } \Omega_2^i, \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } \Omega_p^i \\ \text{Então} & \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \end{cases} \quad (2)$$

sendo Ω_j^i , com $j = 1, 2, \dots, p$, o conjunto *fuzzy* j da regra i , $i = 1, 2, \dots, r$, r o número de regras, p o número de conjuntos *fuzzy* e $z_j(t)$ as variáveis premissas.

Adotando o procedimento de defuzzificação do método centro de gravidade proposto por (TANIGUCHI *et al.*, 2001), os modelos locais (e seu respectivos controladores) serão ponderados por uma função de pertinência convexa $\alpha_i(x)$ (com

$i = 1, 2, \dots, r$ e r o número de regras), que permitirá a descrição da dinâmica da planta em diferentes pontos de operação.

Projeto de regulador com modelos fuzzy Takagi-Sugeno

O controlador PDC consiste em uma realimentação de estados do sistema e uma combinação convexa entre as matrizes de ganho K_j de cada regra do modelo TS da planta (2), tal que

$$u(t) = -\sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t)) K_j x(t) = -K(\alpha)x(t). \quad (3)$$

Lema 1 - Estabilidade

O ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável globalmente, caso exista uma matriz simétrica definida positiva $X > 0$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, as seguintes LMIs sejam factíveis:

$$-X A_i^T - A_i X + B_i M_i + M_i^T B_i^T > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & - (A_i + A_j) X - X (A_i + A_j)^T \\ & + B_i M_j + B_j M_i + M_i^T B_j^T + M_j^T B_i^T \geq 0, \quad i < j, \end{aligned} \quad (5)$$

garante-se estabilidade assintótica global do sistema com os ganhos $K_i = M_i X^{-1}$.

Prova: Maiores detalhes podem ser encontrados em (TANAKA; WANG, 2001).

Lema 2 - Taxa de decaimento

Adotando-se a taxa de decaimento β , $\beta > 0$, a função candidata de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ será tal que $\dot{V}(x) \leq -2\beta V(x)$, caso exista uma matriz simétrica definida positiva $X > 0$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e as seguintes LMIs foram factíveis:

$$-X A_i^T - A_i X + M_i^T B_i^T + B_i M_i - 2\beta X > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & -X A_i^T + M_j^T B_i^T - X A_j^T + M_i^T B_j^T \\ & - A_i X + B_i M_j - A_j X + B_j M_i - 4\beta X \geq 0, \quad i < j, \end{aligned} \quad (7)$$

então os ganhos dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$ garantem estabilidade assintótica global do sistema com taxa de decaimento β .

Prova: Maiores detalhes podem ser encontrados em (BOYD *et al.*, 1994).

Lema 3 - Restrição na entrada

Assuma que a condição inicial $x(0)$ é conhecida. A restrição $\|u(t)\|_2 \leq \gamma$ é cumprida para todo o tempo $t \geq 0$ se as seguintes LMIs forem factíveis:

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \gamma^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (8)$$

e os ganhos do controlador serão dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Prova: Maiores detalhes podem ser encontrados em (TANAKA; WANG, 2001).

Lema 4 - Restrição na saída

Assumindo que a condição inicial $x(0)$ seja conhecida, a restrição $\|y(t)\|_2 \leq \phi$ é cumprida para todo o tempo $t \geq 0$ se as LMIs a seguir forem satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} X & X C_i^T \\ C_i X & \phi^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (9)$$

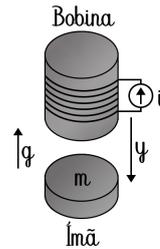
e os ganhos do controlador serão dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Prova: Maiores detalhes podem ser encontrados em (TANAKA; WANG, 2001).

Modelagem do sistema de levitação magnética

O modelo matemático do levitador baseia-se na 2ª Lei de Newton. A partir da Figura 1, que representa a planta, obtém-se o seguinte equacionamento:

Figura 1 – Esquemático da planta do sistema levitador magnético.



Fonte: Autoria própria (2020).

$$F_{total} = F_{mag} + F_{grav} + F_{atrito} = m\ddot{y} = \frac{-\lambda\mu i^2}{2(1 + \mu y)^2} + mg - k\dot{y}, \quad (10)$$

onde $m = 0,05 \text{ kg}$ é a massa do ímã, $\mu = 2 \text{ m}^{-1}$ é a permeabilidade magnética relativa do ar ao redor do ímã, $\lambda = 0,460 \text{ H}$ é o fluxo concatenado da bobina, $i(t)$ a corrente elétrica que percorre a bobina, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade, $k = 0,001 \text{ Ns/m}$ a constante de atrito viscoso, $y(t)$ a posição do ímã, $\dot{y}(t)$ a velocidade do ímã e o ponto de equilíbrio desejado $y_0 = 0,04 \text{ m}$.

Para análise de estabilidade, a representação em espaço de estados do levitador considerará as condições iniciais y_0 e i_0 (corrente presente no eletroímã na condição de equilíbrio) na definição do vetor espaços de estado. O sinal de controle será $u(t) = i^2 - i_0^2$. Definindo o vetor de estados $x = [x_1 \ x_2]^T$, $x_1 = y - y_0$ e $x_2 = \dot{y}$, e a saída do sistema $y(t) = x_1$.

A representação em espaços de estado será

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g\mu(2 + \mu x_1 + 2\mu y_0)}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} & \frac{-k}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} \end{bmatrix} u, \quad (11)$$

$$y = [1 \ 0] x. \quad (12)$$

A presença de duas não-linearidades, os termos não constantes das matrizes A e B da representação, garantem a necessidade de quatro modelos locais (2^2), para que sejam possíveis realizar todas as combinações entre os valores máximos e mínimos de cada não-linearidade. As duas não-linearidades serão denominadas $\tilde{f}_{21}(x)$ e $\tilde{g}_{12}(x)$.

A posição do ímã $y(t)$ pode assumir valores entre 0 e 0,15m. Valores diferentes de $y(t)$ implicarão em valores diferentes de $x_1(t)$ e, conseqüentemente, em valores diferentes de $\tilde{f}_{21}(x)$ e $\tilde{g}_{12}(x)$. Os valores máximos e mínimos de $\tilde{f}_{21}(x)$ e $\tilde{g}_{12}(x)$ serão a_{211} , a_{212} , b_{211} e b_{212} , respectivamente.

Com os valores máximos e mínimos, determina-se as ponderações convexas $\sigma_{211}(x)$ e $\sigma_{212}(x)$, $\xi_{211}(x)$ e $\xi_{212}(x)$ para $\tilde{f}_{21}(x)$ e $\tilde{g}_{12}(x)$, respectivamente. Com isto, obtém-se a função de pertinência $\alpha_i(x)$ para o sistema, tal que (13),

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= \sigma_{211}(x)\xi_{211}(x), & \alpha_2(x) &= \sigma_{211}(x)\xi_{212}(x), \\ \alpha_3(x) &= \sigma_{212}(x)\xi_{211}(x), & \alpha_4(x) &= \sigma_{212}(x)\xi_{212}(x). \end{aligned} \quad (13)$$

E os modelos locais do sistema são dados por

$$\begin{aligned} A_1 = A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{211} & -0,02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 40,7680 & -0,02 \end{bmatrix}, \\ A_2 = A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{212} & -0,02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 27,6024 & -0,02 \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ b_{211} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5,4438 \end{bmatrix}, & B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9,2000 \end{bmatrix}, \\ C_1 = C_2 = C_3 = C_4 &= [1 \ 0], & D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Logo, considerando A_i , B_i , C_i e D_i , se factíveis as condições LMIs definidas pelo projetista, obter-se-á os ganhos de realimentação K_i . As funções de pertinência $\alpha_i(x)$ serão responsáveis pela ponderação dos modelos locais e os respectivos ganhos de realimentação de estados do controlador PDC.

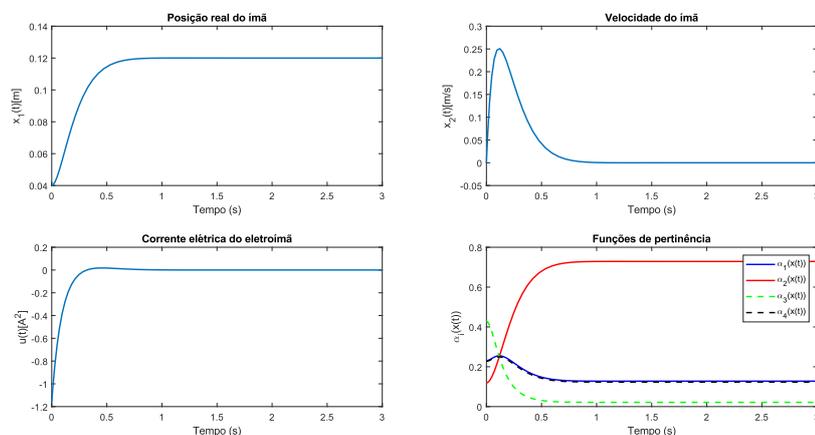
RESULTADOS

Por meio de simulações, considerando condições iniciais $x_1(0) = 0,04$ e $x_2(0) = 0$, e o objetivo é estabilizar o ímã na posição de equilíbrio $x_{1e} = y_0 = 0,12m$.

A resposta sem inclusão da taxa de decaimento e sem nenhuma restrição apresentou um tempo de estabelecimento de aproximadamente $1,8\ s$, *overshoot* na posição e velocidade do sistema e magnitude elevada na ação de controle $u(t)$.

Portanto, adotou-se taxa de decaimento $\beta = 4$, visando obter uma resposta mais rápida. Além disto, para tratamento do *overshoot* (agravado pela taxa de decaimento), inseriu-se restrição da entrada com $\gamma = 2$ e restrição da saída com $\phi = 1$. Com isto, com a primeira garante-se a segurança na isolação do fio de cobre que constitui a bobina do eletroímã e com a segunda restringe a excursão da posição do ímã no domínio de factibilidade do sistema físico. A Figura 2 mostra o resultado obtido com tempo de estabelecimento de $1s$ e *overshoot* nulo.

Figura 2 – Resultados da simulação do levitador magnético considerando condições LMIs de taxa de decaimento, restrição na entrada e na saída.



Fonte: Autoria própria (2020).

CONCLUSÃO

Embora o sistema seja naturalmente instável e não linear, com este trabalho ficou evidente o potencial da ferramenta fuzzy Takagi-Sugeno para a representação exata da dinâmica do sistema em uma região de operação. Através dos resultados simulados, foi possível visualizar o efeito que cada condição LMI afeta na resposta do sistema realimentado e determinar os pontos positivos e negativos que cada modificação trazia durante a síntese do controlador PDC.

Trabalhos futuros poderão realizar uma análise comparativa entre outras condições de LMIs relaxadas para síntese PDC, bem como investigar estratégias de controle discreto, observadores de estado, rastreamento e técnicas para lidar com incertezas do sistema de levitação magnética.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UTFPR, pela participação no Programa de Voluntariado em Iniciação Científica e Tecnológica (Edital PROPPG 04/2019 — PIVICT) da acadêmica Camila Rodrigues.

REFERÊNCIAS

ATAŞLAR-AYYILDIZ, B.; KARAHAN, O. **Trajectory tracking for the magnetic ball levitation system via fuzzy PID control based on CS algorithm**. In: 2019 IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INNOVATIONS IN INTELLIGENT SYSTEMS AND APPLICATIONS (INISTA), 2019, Sofia. **Anais...** Piscataway : IEEE, 2019. p. 1-6.

BOYD, S.; *et al.* **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: **Society for Industrial and Applied Mathematics**, 1994. 193 p.

CARDOSO, M. R. S. **Controlo inteligente de um sistema de levitação magnética**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica e de Computadores) - Instituto Superior de Engenharia do Porto, Porto, 2015.

LENG, P.; *et al.* **Decoupling control of maglev train based on feedback linearization**. **IEEE Access**, Piscataway, v. 7, p. 130352-130362, 2019.

QIAN, KX; *et al.* **New concepts and new design of permanent Maglev rotary artificial heart blood pumps**. **Medical Engineering & Physics**, Oxford, 28(4), p. 383-388, 2006.

SONG, H.; *et al.* **Robust H_{∞} control for disturbance rejection in a magnetic levitation device**. In: 2019 IEEE 28TH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INDUSTRIAL ELECTRONICS (ISIE), Vancouver. **Anais...** Piscataway: IEEE, 2019. p. 2170-2174.

SUN, Y.; *et al.* **Fuzzy H_{∞} robust control for magnetic levitation system of Maglev vehicles based on TS fuzzy model: Design and experiments**. **Journal of Intelligent & Fuzzy Systems**, Amsterdam, v. 36, p. 911-922, 2019.

TANAKA, K.; WANG, H. Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach. New York: **John Wiley & Sons**, 2001.

TANIGUCHI, T.; *et al.* Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 9, n.4, p. 525-538, 2001.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, Piscataway, n. 1, p. 116-132, 1985.