

Análise da deflexão de vigas e eixos por EDO e simulação experimental de baixo custo

Deflection analysis of beams and axes by ODE and low cost experimental simulation

RESUMO

Cristian Comin
cristiancomin@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Adabiel Oleone da Silva
adabielsilva@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Jocelaine Cargnelutti
jocelainecargne@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Suellen Ribeiro Pardo Garcia
suellenpardo@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Vanderlei Galina
vanderleigalina@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

A engenharia é um campo de conhecimento muito importante no desenvolvimento humano e crescimento das cidades modernas. Sendo assim, o presente trabalho tem por característica promover a interdisciplinaridade na análise de deflexão de vigas e eixos para pequenas deformações. Por meio da solução de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, em contraponto com procedimentos experimentais, foi possível calcular o percentual de erro relativo entre o estudo analítico e a prática, assim como aferir análises acerca da teoria e aprofundar conhecimentos adquiridos. Através da realização da atividade foi possível verificar a aplicabilidade da teoria de deflexão para pequenas deformações de estruturas, gerando valores de erro percentual muito satisfatórios nas amostras previstas. A análise experimental foi realizada por acadêmicos de engenharia civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Toledo, utilizando ferramentas de baixo custo, em ambiente de obra, enfatizando a simulação dos conhecimentos técnicos e aproximando a teoria e a prática em situações de fácil aplicação.

PALAVRAS-CHAVE: Interdisciplinaridade. Resistência dos materiais. Equações diferenciais ordinárias. Ensino em engenharia.

ABSTRACT

Engineering is a very important field of knowledge in the human development and growth of modern cities. Therefore, the present work has the characteristic of promoting interdisciplinarity in the analysis of deflection of beams and axes for small deformations. By solving a second-order linear ordinary differential equation, in contrast to experimental procedures, it was possible to calculate the percentage of relative error between the analytical study and the practice, as well as to analyze the theory and deepen the acquired knowledge. Through the performance of the activity it was possible to verify the applicability of the deflection theory for small structures deformations, generating very satisfactory percentage error values in the predicted samples. The experimental analysis was carried out by civil engineering students from the Federal Technological University of Paraná, Toledo campus, using low-cost tools, in a constructions environment, emphasizing the simulation of technical knowledge and bringing theory and practice in easy to apply situations.

KEYWORDS: Interdisciplinarity. Strength of materials. Ordinary differential equations. Engineering teaching.

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autorial: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

A Engenharia desempenha papel fundamental na sociedade, na criação e inovação de tecnologias, proporcionando desenvolvimento e progresso (PAVANELO; GERMANO; FREITAS-LEMES, 2017). Sendo assim, se torna muito importante devido seus impactos nas esferas social, econômica e ambiental, tendo em vista que altera o meio ambiente onde atuam (ROHAN et al., 2016).

Por esse motivo, se tornou importante a implementação de exercícios de relevância para exercer na prática os conhecimentos teóricos transmitidos pelos docentes de disciplinas diferentes (PAVANELO; GERMANO; FREITAS-LEMES, 2017). Observa-se que dentre as disciplinas de formação básica de maior dificuldade dos cursos de engenharia, encontra-se as equações diferenciais, conforme Oliveira e Iglori (2013), tanto na compreensão de conceitos e técnicas, quanto na aplicação contextualizada.

Com base no exposto acima, este trabalho tem a finalidade de integrar principalmente os conhecimentos de equações diferenciais, mecânica e resistência dos materiais, em um estudo da deflexão máxima suportada por uma viga engastada, por meio da comparação do resultado obtido no experimento com o teórico.

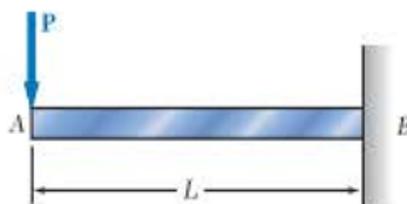
REFERENCIAL TEÓRICO

Aliando o conhecimento multidisciplinar teórico, baseado na análise de uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem que descreve a curvatura de um eixo ou viga, com a prática experimental, pode-se comparar e validar a utilização dos métodos de análise de deformações de vigas e eixos.

EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA LINHA ELÁSTICA

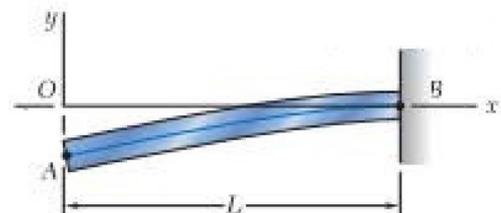
Considerando a situação apresentada na Figura 1, representa-se um esquema semelhante ao que será analisado no estudo de caso, uma viga engastada de comprimento L , com um carregamento concentrado P , na extremidade livre do eixo longitudinal da viga. Na Figura 2, observa-se a deformação da viga.

Figura 1 - Viga engastada



Fonte: Beer et al. (2015)

Figura 2 – Deformação da viga engastada



Fonte: Beer et al. (2015)

De modo sucinto, linha elástica é o diagrama de deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centro de gravidade da viga ou eixo (HIBBELER, 2010). Segundo

Fertis (1993), a lei de Euler-Bernoulli, define que o raio de curvatura descrito pela linha elástica de viga é inversamente proporcional ao momento fletor. Além disso, Hibbeler (2010) pontua que a deflexão das vigas, ou seja, o deslocamento da linha elástica, geralmente é muito pequena. Sendo assim, a relação que governa a linha elástica pode ser reduzida pela Equação (1), uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem (BEER et al., 2015),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1)$$

Na expressão em (1), y descreve o deslocamento vertical da linha elástica, x indica a distância da seção analisada a partir da extremidade engastada da viga, M é o momento fletor, E é o módulo de elasticidade do material e I é o momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra (BEER et al., 2015). O produto EI , denominado rigidez à flexão, é inversamente proporcional à deflexão, conforme Mott e Untener (2018).

MÓDULO DE YOUNG E MOMENTO DE INÉRCIA

O Módulo de Young, ou Módulo de Elasticidade, e o Momento de Inércia, são propriedades intrínsecas à peça em análise. De forma prática, Mott e Untener (2018) afirmam que o módulo de elasticidade quantifica a rigidez do material, ao passo que o momento de inércia, determinado por uma integral com elemento diferencial de área, é a rigidez da geometria da seção transversal da viga.

Para uma seção retangular, de base b e altura a , o momento de inércia é definido pela Equação (2),

$$I_x = \frac{ba^3}{12} \quad (2)$$

Em uma seção circular, de diâmetro d , o momento de inércia é determinado pela Equação (3),

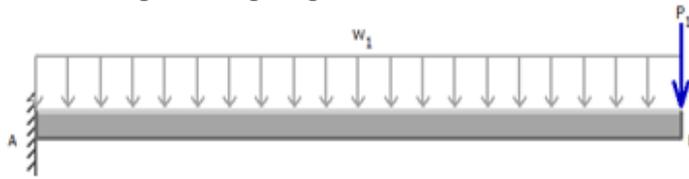
$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} \quad (3)$$

ESTUDO DE CASO

Este estudo concentra-se em vigas e eixos engastados, solicitados por um carregamento concentrado na extremidade livre da peça. Essa situação é comumente encontrada nas denominadas vigas em balanço, que fazem parte da estrutura de sacadas e marquises, ou ainda em escadas com degraus engastados.

De forma geral, estuda-se uma viga em balanço de comprimento L , como na Figura 3, em que w_1 representa o peso próprio da viga por unidade de comprimento e P_1 a força externa.

Figura 3 - Viga Engastada do Estudo de Caso



Fonte: Beer et al. (2015)

Para determinar o momento fletor em função de x é necessário realizar uma análise de corpo livre de uma seção da viga (HIBBELER, 2010). Pela análise das equações de equilíbrio da estática, tem-se a Equação (4) que governa o momento fletor da viga,

$$M(x) = \frac{w_1 L^2}{2} + P_1 L - w_1 Lx - P_1 x + \frac{w_1 x^2}{2} \quad (4)$$

Com a equação do momento fletor escrita em função da variável independente x , basta substituir a Equação (4) na Equação (1), multiplicando ambos os lados da equação resultante por EI e integrando em relação a x para obter a Equação (5),

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{w_1 L^2 x}{2} + P_1 Lx - \frac{w_1 Lx^2}{2} - \frac{P_1 x^2}{2} + \frac{w_1 x^3}{6} + C_1 \quad (5)$$

Integrando a Equação (5) em relação a variável x , obtém-se a Equação (6),

$$EI y(x) = \frac{w_1 L^2 x^2}{4} + \frac{P_1 Lx^2}{2} - \frac{w_1 Lx^3}{6} - \frac{P_1 x^3}{6} + \frac{w_1 x^4}{24} + C_1 x + C_2 \quad (6)$$

As constantes C_1 e C_2 são determinadas a partir das condições de contorno, as quais estão intrínsecas às situações de apoio e carregamento da viga. Nota-se, na Figura 3, que a inclinação da linha elástica é zero na extremidade A, portanto $dy/dx=0$ quando $x=0$; assim como em $x=0$ tem-se que $y=0$, portanto $C_1=0$ e $C_2=0$. Então, a equação da linha elástica da viga engastada é,

$$EI y(x) = \frac{w_1 L^2 x^2}{4} + \frac{P_1 Lx^2}{2} - \frac{w_1 Lx^3}{6} - \frac{P_1 x^3}{6} + \frac{w_1 x^4}{24} \quad (7)$$

O valor crítico se encontra na extremidade livre da viga ou eixo em balanço, isto é, no ponto B onde $x=L$. Substituindo $x=L$ na Equação (7) e realizando as manipulações algébricas necessárias, obtém-se o valor de y que representa a deflexão máxima da viga em análise,

$$y_{\text{máx}} = \frac{-1}{EI} \left(\frac{w_1 L^4}{8} + \frac{P_1 L^3}{3} \right) \quad (8)$$

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

No primeiro ensaio realizado, os materiais explorados foram: vigas de madeira Tauari (*Couratari spp.*, segundo Instituto de Pesquisa Tecnológica do Estado de São Paulo - IPT (2013)) de seção transversal retangular de base igual a 4,8 cm e altura de 2,4 cm; anilhas de 3, 5 e 10 kg; prego e arames para dependurar as anilhas na viga; régua de 1 m e trena.

Com os materiais dispostos, foram ensaiadas vigas com 50 e 75 cm de comprimento, afixadas em um suporte de madeira com parafusos, de modo a impedir o deslocamento e rotação do engaste nos eixos x, y e z. Assim configurado, foram dependuradas as anilhas na extremidade livre das vigas, respectivamente, configurando cargas de 3, 5, 15 e 18 kgf (quilograma-força). Com o uso da régua, foi comparada a altura da extremidade da viga sem carga, e posteriormente, com os pesos afixados, determinando a devida deflexão do ponto mais crítico (extremidade livre). A Figura 4 e a Figura 5 ilustram o experimento.

Figura 4 - Viga de madeira de 50 cm com 3 kgf de carregamento



Fonte: Aatoria própria (2020).

Figura 5 - Viga de madeira de 50 cm com 18 kgf de carregamento



Fonte: Aatoria própria (2020).

Outro ensaio foi realizado com barras de aço CA 50 5/16" (8 mm de diâmetro). Os materiais utilizados foram: barras de aço de 8 mm de diâmetro; anilhas de 3, 5 e 10 kg; arames; régua de 1 m e trena, como observado na Figura 6 e Figura 7.

Figura 6 – Barra de 40 cm com 5 kgf de carregamento



Fonte: Aatoria própria (2020).

Figura 7 – Barra de 40 cm com 3 kgf de carregamento



Fonte: Aatoria própria (2020).

O estudo foi realizado com diferentes comprimentos de barra: 40, 50, 25 e 12,5 cm. Estas foram afixadas em um muro de arrimo e solicitadas com os pesos na extremidade.

RESULTADOS E ANÁLISE

Para o estudo analítico, foi adotado o Módulo de Elasticidade à flexão de 10591 MPa e densidade de 610 kg/m³ (IPT, 2013) para a madeira Tauari. Do mesmo modo, a fim de converter a massa da viga para peso, unidade Newtons (N), foi adotada a aceleração da gravidade como 9,807 m/s². Sendo assim, aplicando a Equação (8), apresenta-se um comparativo no Quadro 1.

Quadro 1 – Resultados das Vigas Engastadas de Madeira.

Tamanho da Viga (mm)	Carga concentrada (kgf)	Deflexão Teórica (mm)	Deflexão Exp. (mm)	Erro Relativo (%)
500	3	2,18	2,1	3,67
	5	3,58	4	11,73
	10	7,07	6,2	12,3
	15	10,56	10,7	1,32
	18	12,65	13,4	5,93
750	3	7,53	6,1	19
	5	12,24	10,5	14,21
	10	24,01	23	4,2
	15	35,79	34,5	3,6
	18	42,85	42	1,98

Fonte: Autoria própria (2020).

Quadro 2 – Resultados dos Eixos de Aço.

Tamanho da barra (mm)	Carga concentrada (kgf)	Deflexão Teórica (mm)	Deflexão Exp. (mm)	Erro Relativo (%)
500	3	31,24	31	0,77
	5	51,56	58,1	12,68
	10	102,37	140,6	37,34
400	3	15,92	16	0,5
	5	26,32	29,5	12,08
	10	52,33	57	8,92
250	3	3,88	5	28,86
	5	6,4	8	25
	10	12,74	16	25,59
125	3	0,48	0,5	4,17
	5	0,8	1	25
	10	1,59	2	25,79

Fonte: Autoria própria (2020).

Para os cálculos de deflexão das barras de aço (CA 50 de 8 mm de diâmetro), configurando uma situação de deflexão de eixos, a NBR 7480:2007 especifica a densidade linear dos vergalhões utilizados para concreto armado com 0,395 kg/m. Utilizando este dado e o Módulo de Elasticidade com o valor de 200 GPa (BEER et al., 2010), foi possível realizar a comparação dos resultados expostos no Quadro 2.

Em relação às vigas de madeira observa-se que a viga de 750 mm apresentou comportamento padrão, com decrescente erro relativo ao passo em que se acrescenta maior carga. Já a viga de 500 mm não mostrou a mesma regularidade, resultando erros relativos menores que 6% quando aplicadas cargas de 3, 15 e 18 kgf, e acima de 10% com aplicação de 5 e 10 kgf.

Sobre as barras de aço, pode-se notar que os eixos de maior comprimento, 400 e 500 mm, tiveram resultados satisfatórios com pesos de 3 e 5 kgf, apresentando erros relativos semelhantes e progressivos; quanto maior o peso, maior o erro. Já as vigas menores, 125 e 250 mm, revelaram erros semelhantes, porém, maiores na maioria dos casos, quando aplicado pesos de 5 e 10 kgf.

CONCLUSÃO

A partir dos resultados obtidos, observa-se que a diferença percentual entre os dados analíticos e os experimentais foram maiores para as barras de aço, quando a deflexão é relativamente grande em relação à dimensão do material, visto que a Equação (1) é aplicada apenas para pequenas deformações, como fora adotado na sua modelagem.

Vale ressaltar a possível ocorrência de fontes de erro na parte experimental do estudo, haja vista a utilização de materiais comuns do cotidiano. Por se tratar muitas vezes de deformações diminutas, frações de milímetro fazem diferença no erro percentual. Uma evidência disso, é o fato de que na deflexão de vigas de madeira, os menores erros relativos de cada comprimento ocorreram com a carga de 15 kgf, ou seja, um intermediário, em que permite uma leitura melhor, por não provocar uma deflexão tão diminuta, e ao mesmo tempo não excede o intervalo de aplicação da teoria.

Ademais, a interdisciplinaridade no desenvolvimento do projeto motivou os alunos a busca por conhecimento, auxiliando na concretização dos conceitos e técnicas adquiridas em sala, no trabalho em equipe e no planejamento.

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer aos professores orientadores pelo apoio técnico e científico, e ao Sr. Dirceu Eloi Comin, ao conceder material e experiência para o estudo prático em vigas.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7480**: Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado - Especificação. Rio de Janeiro, 2007.

BEER, Ferdinand P. *et al.* **Mecânica dos Materiais**. 7ª edição, Porto Alegre: AMGH Editora LTDA. 2015.

FERTIS, D. G. **Nonlinear Mechanics**. Florida: CRC Press. 1993.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos Materiais**. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2010.

INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO. **Catálogo de madeiras brasileiras para a construção civil**. São Paulo: IPT. 2013.

MOTT, Robert L; UNTENER, Joseph A. **Applied Strength of Materials**. 6ª edição, Boca Raton: Taylor & Francis, CRC Press, 2018.

OLIVEIRA, Eliane Alves de; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. **ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: Um levantamento preliminar da produção científica**. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Pernambuco. v. 4, n. 2, 2013.

PAVANELO, Elisângela; GERMANO, José Silvério Edmundo; FREITAS-LEMES, Priscila Lourenço. **A interdisciplinaridade em cursos de engenharia**. Belo Horizonte: Rev. Docência Ens. Sup, v. 7, n. 2, p. 130-148. 2017.

ROHAN, Ubiratan; SOARES, Carlos Alberto Pereira; FRANÇA, Sergio Luiz Braga; MEIRIÑO, Marcelo Jasmim. **A FORMAÇÃO DO ENGENHEIRO CIVIL INOVADOR BRASILEIRO FRENTE AOS DESAFIOS DA TECNOLOGIA, DO MERCADO, DA INOVAÇÃO E DA SUSTENTABILIDADE**. In: XII Congresso Nacional de Excelência em Gestão e III INOVARSE – Responsabilidade Social Aplicada, 2016, Rio de Janeiro. Anais. Rio de Janeiro, 2016.