

Projeto de sistema de controle robusto via LMIs para aplicação em helicóptero 3-DOF

Design of robust control system via LMIs applied in 3-DOF helicopter

RESUMO

O seguinte artigo tem a premissa de apresentar o projeto via LMIs de um controlador robusto para um helicóptero de bancada cuja dinâmica é comandada por dois motores CC. A cada um desses motores foi associada uma incerteza a fim de avaliar e comparar condições de estabilidade sob diferentes aspectos de projeto do controlador robusto. Estabelecer um controle robusto para um motor CC significa garantir o funcionamento adequado da planta mesmo se o sistema possuir grandezas incertas, como parâmetros variáveis ou difíceis de mensurar, ou ainda falhas estruturais. Isso faz com que a operação do controlador no sistema seja confiável. Assim, o controle robusto é uma opção notável para um sistema sujeito a várias especificações de projeto ou sistemas complexos que demandam uma alta confiabilidade de operação. Foram estudados diferentes métodos de projeto, sendo que nesse artigo foi enfatizado o projeto de controlador robusto via LMIs para alocação de polos em regiões específicas e custo garantido H-infinito. Essa abordagem garantiu resultados de estabilidade para o helicóptero diante das incertezas nos motores de propulsão do sistema.

PALAVRAS-CHAVE: Controle Robusto. Helicóptero 3-DOF. Desigualdades Matriciais Lineares.

ABSTRACT

The following paper has the premise of presenting the project of a robust controller via LMIs for a benchtop helicopter whose dynamics are controlled by two DC motors. An uncertainty was associated with each of these engines in order to evaluate and compare stability conditions under different aspects of the robust controller design. Establishing robust control for a DC motor means ensuring the proper functioning of the plant even if the system has uncertain quantities, such as variable or difficult to measure parameters, or structural failures. This makes the operation of the controller in the system reliable. Thus, robust control is a notable option for a system subject to various design specifications or complex systems that demand high operating reliability. Different design methods were studied, this paper brings the robust controller design via LMIs for pole allocation in specific regions and the optimal and sub-optimal controller design with guaranteed cost H-infinity. This approach guaranteed stability results for the helicopter in the face of uncertainties in the system's propulsion motors.

KEYWORDS: Robust Control. 3-DOF Helicopter. Linear Matrix Inequalities (LMIs).

Arthur Enrico Ceci dos Santos
arthursantos@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil.

Willian Ricardo Bispo Murbak Nunes
willianr@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil.

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

Motores de corrente contínua (CC) são usados em várias aplicações industriais, bem como no setor aeroespacial, principalmente se tratando de servomecanismos de controle dinâmico das aeronaves. Em geral, esses motores são escolhidos devido a facilidade construtiva de um sistema de acionamento e a possibilidade de adoção de técnicas simplificadas para controle de velocidade e torque. No entanto, técnicas clássicas de controle possuem limitações diante incertezas do sistema dinâmico. Neste caso, uma abordagem com controle robusto se torna mais interessante para garantir uma boa performance do sistema.

As LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) compõem um método eficiente para a solução de problemas de controle incertos, possibilitando a descrição de diferentes tipos de especificações e restrições de projeto, podendo ser resolvidas facilmente por técnicas de programação convexa (BUZACHERO *et al.*, 2010; NUNES *et al.*, 2017). Há diversas abordagens que incluem as mesmas técnicas que são apresentadas nesse trabalho, inclusive utilizando a mesma planta. As LMIs foram utilizadas por Buzachero *et al.* (2010) para incluir restrições de taxa de decaimento no projeto e para otimizar a norma dos controladores. Nunes *et al.* (2017) propuseram o projeto de um controlador robusto em região circular do plano complexo. Novas condições LMIs foram apresentadas por Manesco *et al.* (2012) para minimizar o custo garantido \mathcal{H}_∞ . Fazzolari *et al.* (2014) propuseram um controle por estrutura variável e modos deslizantes de uma suspensão ativa baseado em LMIs e alocação de autovalores em uma região específica \mathcal{D} -estável. A contribuição deste trabalho se trata da síntese do controlador robusto baseado em alocação de autovalores em uma região \mathcal{D} -estável com custo garantido \mathcal{H}_∞ considerando falha nos dois motores de propulsão do helicóptero 3-DOF.

METODOLOGIA

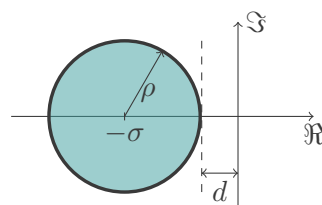
Restrições LMIs para alocação de polos

A teoria de Lyapunov pode ser estendida para tratar o problema de \mathcal{D} estabilidade. Neste sentido, pode-se impor desigualdades matriciais para alocar os polos do sistemas em sub-regiões convexas do plano complexo. Com isto, define-se uma região LMI denotada por \mathcal{D} , simétrica em relação ao eixo real (CHILALI; GAHINET; APKARIAN, 1999). Neste trabalho, duas regiões LMIs são avaliadas: círculo deslocado e região $S(\gamma, r, \theta)$.

Lema 1

Considerando a alocação de autovalores em uma região circular deslocada à esquerda do semiplano complexo, conforme Figura 1,

Figura 1 – Região circular de alocação de polos.



Fonte: Autoria própria (2020).

e o sistema incerto dado pela equação (1), onde $u = -Kx$.

$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u. \quad (1)$$

Este sistema é estável e seus autovalores de malha fechada estão no interior de um círculo de raio ρ e centro em $(-\sigma, 0)$ se e somente se existirem as matrizes $W = W^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as seguintes LMIs:

$$\begin{cases} W > 0, \\ \begin{bmatrix} W\rho^2 & WA(\alpha)^T - Z^T B(\alpha)^T + W\sigma \\ A(\alpha)W - B(\alpha)Z + W\sigma & W \end{bmatrix} > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Os parâmetros taxa de decaimento e oscilação se relacionam com o círculo deslocado pelas grandezas d e ρ , respectivamente. A demonstração deste lema pode ser encontrada em (NUNES *et al.*, 2017), entretanto, aqui considera-se a realimentação negativa.

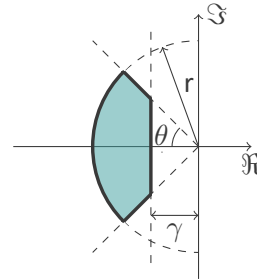
Lema 2

Considerando uma região de alocação $S(\gamma, r, \theta)$ definida em termos de números complexos $s = x + jy$ onde:

$$\begin{cases} x < -\gamma < 0, \\ |x + jy| < r, \\ \tan(\theta)x < |y|. \end{cases} \quad (3)$$

Essa região é limitada pela intersecção entre a reta vertical em $(-\gamma, y)$, onde $\gamma > 0$, a semicircunferência de raio r e o cone formado pelas retas com angulação θ ao eixo horizontal. A região $S(\gamma, r, \theta)$ é ilustrada na Figura 2.

Figura 2 – Região $S(\gamma, r, \theta)$ de alocação de polos.



Fonte: Autoria própria (2020).

O sistema realimentado com incertezas politópicas linear e invariante no tempo dado por (1) é estável na região $S(\gamma, r, \theta)$, se e somente se, existir uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sendo $G_i = A_i P - B_i X$, de maneira que as LMIs (4) sejam factíveis

$$\begin{cases} P > 0, \\ \begin{bmatrix} -rP & G_i \\ G_i^T & -rP \end{bmatrix} < 0, \\ 2\gamma P + G_i + G_i^T < 0, \\ \begin{bmatrix} \sin \theta (G_i + G_i^T) & \cos \theta (G_i - G_i^T) \\ \cos \theta (G_i^T - G_i) & \sin \theta (G_i + G_i^T) \end{bmatrix} < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Assim, a matriz de ganho de realimentação dos estados será dada por $K = X P^{-1}$. Sabendo que o fator de amortecimento ξ se relaciona com o ângulo θ , a frequência natural não amortecida ω_n é equivalente ao raio r e que a taxa de decaimento γ está associada a $\xi\omega_n$. Para maiores detalhes de prova deste lema, ver (FAZZOLARI *et al.*, 2014).

Restrições LMIs para custo garantido \mathcal{H}_∞

Para sistemas MIMO (do inglês *Multiple Inputs - Multiple Outputs*) a norma \mathcal{H}_∞ corresponde ao máximo valor atingido pelo diagrama de valores singulares (BOYD *et al.*, 1994; ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996). Sendo assim, para minimizar os valores produzidos nas saídas por uma entrada exógena, basta minimizar o valor da norma \mathcal{H}_∞ . Portanto, a norma \mathcal{H}_∞ pode ser caracterizada pelo menor valor de γ , tal que

$$\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t) - \gamma^2\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) < 0, \quad (5)$$

conforme indicado em (MANESCO *et al.*, 2012).

Lema 3

O sistema dado por (6), onde $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} + \mathbf{B}_2(\alpha)\mathbf{u} + \mathbf{B}_1(\alpha)\mathbf{w}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(\alpha)\mathbf{x} + \mathbf{D}_2(\alpha)\mathbf{u} + \mathbf{D}_1(\alpha)\mathbf{w}, \end{cases} \quad (6)$$

é estabilizável por meio de realimentação de estados se existir uma solução para o problema de otimização convexo

$$\begin{aligned} \min \mu \\ \mathbf{Z}, \mathbf{W} = \mathbf{W}^T > 0, \\ \text{s.a} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}_{2i}\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_{2i}^T & \mathbf{W}\mathbf{C}_i^T - \mathbf{Z}^T\mathbf{D}_{2i}^T & \mathbf{B}_{1i} \\ \mathbf{C}_i\mathbf{W} - \mathbf{D}_{2i}\mathbf{Z} & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_{1i} \\ \mathbf{B}_{1i}^T & \mathbf{D}_{1i}^T & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

em que $\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}$ assegura $\|H(s)\|_\infty \leq \sqrt{\mu}, \forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2) \in \mathcal{D}$.

Modelagem do helicóptero 3-DOF

A planta para a análise em questão será o helicóptero com três graus de liberdade (DOF, do inglês *degree of freedom*) da Quanser®, o qual é destinado ao uso educacional na área de dinâmica e controle aeroespacial. A propulsão desse helicóptero é gerada pelos dois motores CC instalados em umas das extremidades da haste, ao passo que na extremidade oposta existe um contrapeso que facilita a geração de sustentação pelos motores. Seus três graus de liberdade são definidos pelo movimento dos ângulos de *elevation*, *pitch* e *travel*. Uma tensão positiva nos dois motores causa uma elevação na extremidade em que os motores estão montados, essa elevação é associada ao ângulo de *elevation* (ε). Já uma tensão maior aplicada no motor dianteiro (V_f) causa uma inclinação positiva enquanto uma tensão maior no motor traseiro (V_b) causa uma inclinação negativa, essa inclinação é associada ao ângulo de *pitch* (ρ). Se houver essa inclinação, então também haverá um vetor de força de sustentação ao longo do eixo horizontal o que ocasiona em um movimento paralelo à superfície em que o helicóptero está montado, esse movimento é associado ao ângulo de *travel* (λ). O modelo em espaço de estados que descreve a dinâmica do helicóptero 3-DOF é (NUNES *et al.*, 2017):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{w}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{cases} \quad (8)$$

Sendo \mathbf{x} o vetor de estados; \mathbf{y} a saída, isto é, os ângulos de *elevation*, *pitch* e *travel*; \mathbf{u} o sinal de controle e \mathbf{w} a entrada exógena ou distúrbio.

$$\mathbf{x} = [\varepsilon \quad \rho \quad \lambda \quad \dot{\varepsilon} \quad \dot{\rho} \quad \dot{\lambda} \quad \xi \quad \gamma]^T, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} V_f \\ V_b \end{bmatrix}. \quad (9)$$

As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 e \mathbf{C} são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2L_a m_f - L_w m_w)g}{m_w L_w^2 + 2m_f L_h^2 + 2m_f L_a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{mg}{J_c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{L_a K_f}{2m_f L_a^2 + m_w L_w^2} & \frac{L_a K_f}{2m_f L_a^2 + m_w L_w^2} \\ \frac{K_f}{2m_f L_h} & -\frac{K_f}{2m_f L_h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

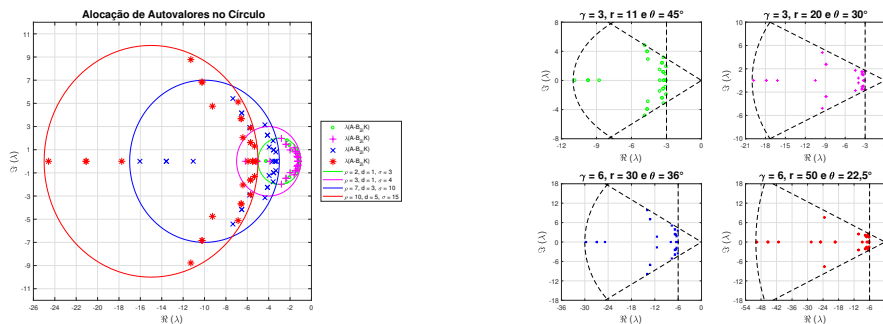
Para a análise da robustez do helicóptero, foi considerada uma redução de 20% da tensão dos motores traseiro e dianteiro. Logo, o politopo de incertezas é constituído de quatro vértices de incertezas referentes a tensão nos motores traseiro entre $0,8V_b$ e $1,0V_b$ e dianteiro entre $0,8V_f$ e $1,0V_f$.

RESULTADOS

Alocação em região circular deslocada e região $S(\gamma, r, \theta)$

A fim de manipular alguns parâmetros de projeto, as LMIs de (2) e de (4) foram utilizadas. Para a alocação, quatro conjuntos de valores d e ρ foram escolhidos para a região circular deslocada. E posteriormente, quatro conjuntos de valores γ , r e θ foram avaliados para a região $S(\gamma, r, \theta)$. Consequentemente, quatro ganhos robustos foram obtidos para cada região de alocação, Figura 3(a) e Figura 3(b).

Figura 3 – Alocação de autovalores para as regiões propostas.



(a) Alocação de autovalores de malha fechada em círculo deslocado.

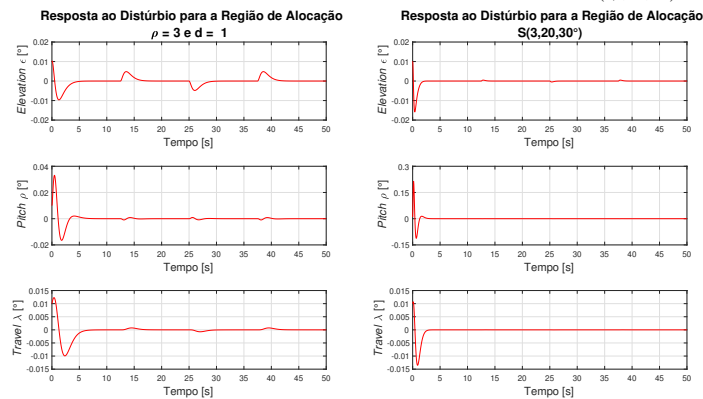
(b) Alocação de autovalores de malha fechada em região de intersecção $S(\gamma, r, \theta)$.

Fonte: Autoria própria (2020).

Notou-se que quanto maior for a distância d escolhida, maior será a norma $\|K\|$ do controlador. Tal fato pode implicar em uma dificuldade de implementação do sistema de controle projetado. Ainda, percebeu-se que a aumentando a taxa de decaimento γ na região $S(\gamma, r, \theta)$ a norma do controlador aumenta substancialmente, o mesmo aconteceu ao aumentar-se a distância d na alocação no círculo deslocado.

A Figura 4 mostra um comparativo entre as respostas temporais do sistema sujeito a um distúrbio do tipo onda quadrada de amplitude $0,02\text{ m}$, frequência de $0,04\text{ Hz}$ com largura de pulso de 50%. Percebe-se que o controle projetado pela alocação de autovalores na região $S(\gamma, r, \theta)$ é mais satisfatório, uma vez que garante uma melhor estabilidade frente as oscilações da entrada exógena. Entretanto, a norma do controlador projetado pela alocação de autovalores na região $S(3, 20, 30^\circ)$ é 7751, enquanto que a norma do controlador projetado pela alocação de autovalores na região circular onde $\rho = 3$ e $d = 1$ é 159.

Figura 4 – Comparativo entre as respostas temporais para as condições do vértice 2 da alocação de polos no círculo e na região $S(\gamma, r, \theta)$

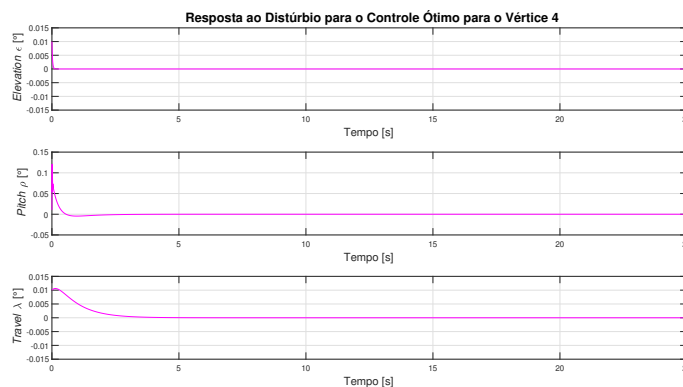


Fonte: Autoria própria (2020).

Controlador ótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞

A norma \mathcal{H}_∞ para o caso onde o sistema está controlado pelo ganho de estabilização é de $0,7774$. Já com um controlador ótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞ , a norma \mathcal{H}_∞ é de $1,2045 \times 10^{-4}$, ou seja, o controlador proporcionou uma redução de 99,98% no pior caso da resposta em frequência do sistema controlado pelo ganho de estabilização robusta. Para analisar a qualidade do controle projetado, a Figura 5 mostra o vértice 4, o que apresenta falha nos dois motores do helicóptero, responde a um distúrbio senoidal de amplitude $0,01\text{ m}$ e frequência angular de $\pi\text{ rad/s}$. Percebe-se, pela Figura 5, que o controle proporcionou uma resposta muito rápida e estável, de modo que as variáveis de estado *elevation* e *travel* não apresentam sobressinais expressivos, praticamente partem de suas condições iniciais para o ponto de equilíbrio. Já a variável *pitch* sofreu um sobressinal bastante significativo, mas alcança a estabilidade rapidamente.

Figura 5 – Resposta temporal para as condições do vértice 4 do sistema com controle ótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞ .



Fonte: Autoria própria (2020).

Embora o controle ótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞ proporcione uma perfor-

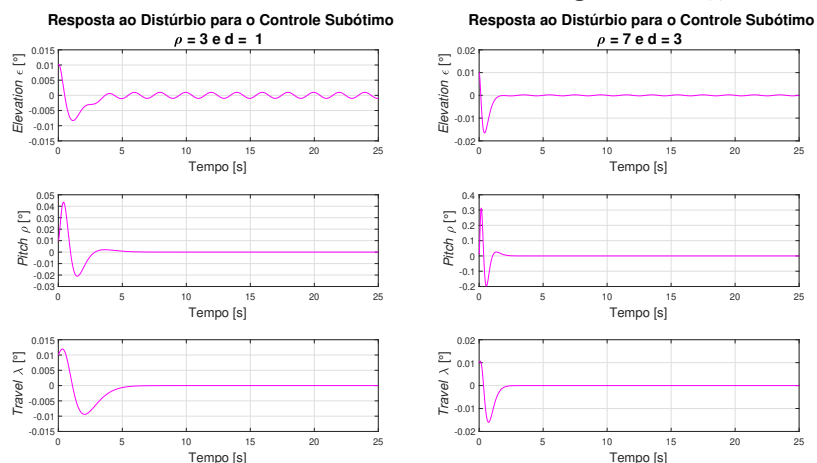
mance superior em termos de estabilização, essa técnica é impraticável devido a norma do controlador ser substancialmente grande. A norma do controlador ótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞ ótimo projetado é de $1,5943 \times 10^6$.

Controlador subótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞

A alocação de autovalores no círculo foi utilizada com o objetivo de diminuir a norma do controlador para implementação prática. As LMIs utilizadas foram as inequações (7) do Lema 3 em conjunto com as LMIs (2) do Lema 1. As duas regiões circulares de alocação foram o círculo verde e o círculo magenta, respectivamente, da Figura 3(a) pois foi visto que quanto mais próxima do eixo imaginário, menor é a norma do controlador utilizando as LMIs de alocação no círculo deslocado.

As normas dos controladores subótimos com custo garantido \mathcal{H}_∞ são 99,98% e 99,27% menores do que a norma do controlador ótimo já projetado, respectivamente. Essa diminuição expressiva na norma do controlador possibilita implementações mais práticas em termos de controladores. Para o sistema com controle subótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞ e alocação de autovalores no círculo em que $\rho = 3$ e $d = 1$ a norma \mathcal{H}_∞ é 0,5573, ao passo que para a região de alocação no círculo em que $\rho = 7$ e $d = 3$ a norma \mathcal{H}_∞ é 0,1763. Percebe-se que o sistema com controle subótimo tem norma \mathcal{H}_∞ significativamente maior do que o sistema com controle ótimo. A fim de analisar a performance dos controladores projetados, o sistema foi submetido ao mesmo distúrbio senoidal utilizado anteriormente. A Figura 6 representa as respostas temporais dos sistemas controlados pelos dois controladores subótimos com custo garantido \mathcal{H}_∞ ao distúrbio senoidal, respectivamente. A análise da Figura 6 permite concluir que o controlador subótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞ cuja região de alocação de autovalores é o círculo deslocado em que $\rho = 7$ e $d = 3$ é mais apropriado para estabilizar o helicóptero no caso da entrada exógena senoidal, pois apesar dos grandes sobressinais, principalmente para a variável *pitch*, esse controlador não permite oscilações significativas para o *elevation* como o projeto alocado no círculo em que $\rho = 3$ e $d = 1$ permite.

Figura 6 – Resposta temporal para as condições do vértice 4 do sistema em malha fechada com controle subótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞ .



Fonte: Autoria própria.

CONCLUSÃO

Este trabalho estudou e analisou a proposta de controle robusto para helicóptero 3-DOF possuindo incertezas nos motores, que representam possíveis falhas no sistema. Por meio de condições LMIs, avaliou-se a alocação de autovalores em regiões distintas e o custo garantido \mathcal{H}_∞ , que possibilita ao projetista avaliar critérios

de projeto e determinar o ganho de realimentação de estado mais adequado para a aplicação.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UTFPR, pela participação no Programa de Voluntariado em Iniciação Científica e Tecnológica (Edital PROPPG 04/2019 — PIVICT) do acadêmico Arthur Enrico Ceci dos Santos.

REFERÊNCIAS

BOYD, S. *et al.* **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 193 p.

BUZACHERO L. F. S. *et al.* Implementações de controladores robustos, com restrições de taxa de decaimento e otimizados em sistemas sujeitos a falhas. *In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES*, 10, 2010, Serra Negra. **Anais...** Serra Negra: SBMAC, 2010.

CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust pole placement in lmi regions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 44, n. 12, p. 2257–2270, 1999.

FAZZOLARI, H. A. *et al.* Projeto de controle com estrutura variável e modos deslizantes de ordem completa por D-estabilidade. *In: XX CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA*, 2014, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBA, 2014.

MANESCO, R. M. *et al.* Estabilidade robusta \mathcal{H}_∞ de sistemas lineares: uma implementação em um helicóptero 3-dof de bancada. *In: XIX CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA*, 2012, Campina Grande. **Anais...** Campina Grande: CBA, 2012.

NUNES, W. R. B. M. *et al.* Síntese de controlador robusto via lmi para o helicóptero 3-dof. *In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES*, 2017, São José do Rio Preto. **Anais...** São José do Rio Preto: SBMAC, 2017.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and optimal control**. v. 40, New Jersey: Prentice Hall, 1996. p. 146.