

Resolução de Equação Diferencial Ordinária pelo Método das Diferenças Finitas

Resolution of Ordinary Differential Equation by Finite Difference Method

RESUMO

Larissa Arianna Mekelburg da Silva
larimekel@hotmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Jocelaine Cargnelutti
jocelaine@cargne@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Vanderlei Galina
vanderleigalina@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

A matemática tem o poder de descrever muitos problemas de diversas áreas da ciência dando origem a alguns modelos. Nesse sentido, o foco desse trabalho é estudar de forma introdutória o método das diferenças finitas (MDF) que será aplicado na resolução de uma equação diferencial ordinária com problema de valor de contorno. Primeiramente foi realizada uma breve introdução sobre a teoria das equações diferenciais e o MDF, em seguida foi apresentado como chegar às aproximações das derivadas por meio de definições e da série de Taylor. Para finalizar foi resolvido um estudo de caso analiticamente e numericamente. Diante do que foi estudado e dos resultados obtidos, pôde-se realmente perceber que tanto a teoria das equações diferenciais como o método das diferenças finitas tem uma aplicabilidade em várias áreas da ciência e que o MDF revelou-se eficaz nas aproximações das equações diferenciais ordinárias.

PALAVRAS-CHAVE: Equações diferenciais ordinárias. Problemas de valores de contorno. Diferenças finitas.

ABSTRACT

Mathematics has the power to describe many problems in different areas of science giving rise to some models. In this sense, the focus of this work is to study the finite difference method (MDF) in an introductory way that will be applied in solving an ordinary differential equation with a boundary value problem. First, a brief introduction was made on the theory of differential equations and the MDF, then it was presented how to arrive at the approximations of the derivatives through definitions and the Taylor series. Finally, a case study was solved analytically and numerically. In view of what was studied and the results obtained, it was possible to realize that both the theory of differential equations and the method of finite differences has an applicability in several areas of science and that MDF has proved effective in approximating ordinary differential equations.

KEYWORDS: Ordinary differential equations. Boundary value problems. Finite differences.

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

A evolução dos métodos do cálculo diferencial e integral, iniciados por Newton e Leibnitz, no final do século XVII, fizeram com que as equações diferenciais se fortificassem como uma nova área da matemática, no século seguinte tornou-se uma disciplina independente, tendo cooperações de Euler, Laplace e Lagrange (SPERANDIO, 2003).

A matemática tem o poder de descrever muitos problemas de diversas áreas da ciência dando origem a alguns modelos, a maioria deles se constitui de uma equação que possui derivadas, ou seja, de equações diferenciais. Desse modo, métodos foram desenvolvidos para encontrar e traçar o comportamento das soluções (CARGNELUTTI, 2015).

Essas equações podem ser abordadas analiticamente, experimentalmente ou numericamente. Porém, na maioria das vezes, esses problemas não têm soluções analíticas tendo que recorrer então a soluções numéricas para chegar a uma aproximação, podendo assim, do mesmo modo, modelar e descobrir o comportamento da solução desses problemas tendo um erro muito pequeno em suas soluções (CARGNELUTTI, 2015).

Dentre os métodos numéricos desenvolvidos até os dias de hoje, um dos que pode ser usado para a resolução de equações diferenciais é o método das diferenças finitas (MDF), ele aproxima as derivadas de uma equação, fornecendo uma solução bem próxima do que seria a exata. Desse modo, esse método pode ajudar muito pesquisadores de várias áreas, pois mesmo que alguns problemas sejam possíveis de se resolver analiticamente, pode ser que a resolução numérica torne a resolução mais fácil e rápida (WROBEL, 1989).

Tendo em vista as informações apresentadas, o foco desse trabalho é apresentar os conhecimentos das equações diferenciais ordinárias (EDO) e estudar de forma introdutória o método das diferenças finitas que será aplicado na resolução de uma equação diferencial ordinária com problema de valor de contorno.

METODOLOGIA

A realização desse trabalho se iniciou com o estudo bibliográfico sobre a teoria relativa às equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem e também sobre o método das diferenças finitas, com o intuito de utilizar o método para resolver numericamente um estudo de caso e comparar com sua solução analítica.

Equação e diferencial indicam uma equação que envolve derivadas. De acordo com Zill e Cullen (2001), pode-se definir equação diferencial como uma equação que possui derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes. Porém, neste trabalho será abordado somente as equações diferenciais ordinárias que contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes só que em relação a uma única variável independente. Uma equação diferencial ordinária, de modo geral, pode ser explícita na forma,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (1)$$

em que x é a variável independente e y a variável dependente. Logo, F abrange a variável independente x , a função y e as derivadas de ordem n de y em relação a x . Porém é mais complicado explorar diretamente a equação (1) então o tratamento feito supõe que o teorema das funções implícitas é aplicável a (1), portanto podendo-se escrever da seguinte forma (SPERANDIO, 2003):

$$\frac{d^ny}{dx^n} = G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \quad (2)$$

Segundo Zill e Cullen (2001, p. 4), pode-se definir a solução para uma equação diferencial como sendo “qualquer função f definida em algum intervalo I , que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade”, portanto, o propósito é encontrar uma função y que satisfaça a equação (1), podendo ter condições do tipo: $y(x_0) = c_0, y'(x_1) = c_1, \dots, y^{n-1}(x_{n-1}) = c_{n-1}$. Quando $x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1}$, então o problema é definido como de valor inicial, se as condições são indicadas em pontos distintos, que é diverso do caso anterior, o problema é dito como valor de contorno (SPERANDIO, 2003).

A partir do estudo das equações diferenciais ordinárias, dos problemas que elas podem envolver e das suas soluções pode-se perceber que há casos que não possuem solução ou que é quase impossível de se encontrar, para esses problemas é possível utilizar o método das diferenças finitas para se chegar a uma aproximação da resposta que seria a exata. O método das diferenças finitas aproxima as derivadas de uma equação diferencial por meio de fórmulas de diferenças, utilizando a discretização. A seguir apresentam-se as principais definições usadas para estabelecer o MDF. Na equação (1) tem-se a derivada de uma função $y(x)$, por definição, em um ponto $x = x_i$.

$$y'(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} \quad (3)$$

Podemos aproximar essa derivada adicionando um incremento h no valor de x_i , chamando-a de diferença progressiva (avançada).

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \quad (4)$$

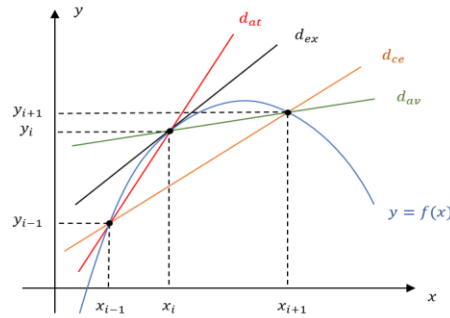
Da mesma forma pode-se definir aproximações de diferenças regressiva (atrasada) e central, respectivamente,

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} \quad (5)$$

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} \quad (6)$$

As equações (4), (5) e (6) podem ser melhor visualizadas na figura (1). Sendo d_{at} a diferença atrasada d_{ex} a derivada exata, d_{ce} a diferença centrada e d_{av} a diferença avançada.

Figura 1 - Interpretação geométrica de aproximações de uma derivada



Fonte: Cargnelutti e Galina (2015).

As equações (4), (5) e (6) também podem ser obtidas por meio de séries de Taylor truncadas, assim pode-se estimar o erro da aproximação. Então tem-se,

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots \quad (7)$$

Para $x = x_i + h$ em torno de y em $x = x_i$ e já simplificando tem-se

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2} + y'''(x_i)\frac{h^3}{3!} + \dots \quad (8)$$

Colocando $y'(x_i)$ em evidência e desconsiderando os termos relativos às derivadas de ordem igual ou superior a dois pode-se chegar à aproximação progressiva.

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \quad (9)$$

Substituindo agora na equação (7) $x = x_{i-1}$ em torno de f em $x = x_i$ e já simplificando tem-se,

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2} - y'''(x_i)\frac{h^3}{3!} + \dots \quad (10)$$

Colocando $y'(x_i)$ em evidência em (10) e desconsiderando os termos relativos às derivadas de ordem igual ou superior a dois pode-se chegar à aproximação regressiva,

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} \quad (11)$$

Subtraindo a equação (10) da equação (8), colocando $y'(x_i)$ em evidência e desconsiderando os termos relativos às derivadas de ordem igual ou superior a dois obtém-se a aproximação central,

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} \quad (12)$$

O erro é de ordem h pois h é um valor muito pequeno e o maior termo desprezado é uma constante vezes h^3 . Para se obter uma aproximação para a derivada de segunda ordem por meio do MDF basta somar (8) com (10),

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{2h^4}{4!}y''''(x_i) + \dots \quad (13)$$

Desconsiderando os termos relativos às derivadas de ordem superior a dois e colocando $y''(x_i)$ em evidência tem-se que,

$$y''(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} \quad (14)$$

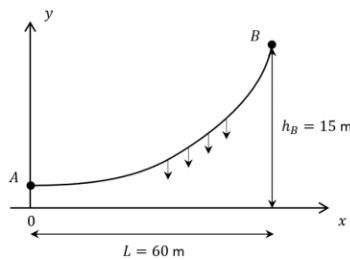
ESTUDO DE CASO

O estudo de caso a ser desenvolvido, trata de um cabo pendurado por dois suportes fixos em A e B , como mostra a Figura 1, e está carregado com uma distribuição de carga cujo módulo varia com x conforme a equação,

$$w = w_0 \left[1 + \sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \quad (15)$$

em que $w_0 = 450 \text{ N/m}$ e L é a distância horizontal entre os pontos A e B .

Figura 1 - Cabo suspenso



Fonte: Autores (2020).

A inclinação do cabo no seu ponto mais baixo é $y'(x=0) = 0$. Neste ponto tem-se a mínima tensão no cabo, denominada T_0 . A equação diferencial que descreve o comportamento do cabo é dada por,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w_0}{T_0} \left[1 + \sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \quad (16)$$

onde y é a posição vertical do cabo ou altura, e x é a posição horizontal do cabo. Dadas as condições de contorno, o problema de valor de contorno que descreve o comportamento do cabo suspenso é dado por,

$$\begin{cases} y''(x) = \frac{w_0}{T_0} \left[1 + \sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right] \\ y'(0) = 0 \\ y(60) = 15 \end{cases} \quad (17)$$

O valor da mínima tensão no cabo pode ser determinado de forma iterativa avaliando o valor de h_B para vários valores de T_0 . Com isso, obtém-se $T_0 = 108.012,08 \text{ N}$.

Solução analítica: a EDO na equação (16), é uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea. Como se trata de uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes, sua resolução analítica é dada pelo método dos coeficientes indeterminados. Nesse método o resultado final consiste na soma da solução complementar com a particular. É possível encontrar a solução complementar através da EDO homogênea da equação (16), dada por,

$$y''(x) = 0 \quad (18)$$

Portanto, a solução complementar é,

$$y = c_1 + xc_2 \quad (19)$$

Para encontrar a solução particular utiliza-se a função $g(x)$, que é a função seno de (16), podendo-se resolver utilizando a abordagem por superposição. Dessa forma, obtém-se a solução analítica,

$$y(x) = 2,0831 \cdot 10^{-3} x^2 + 0,1591 x + 4,0312 - 6,0786 \sin\left(\frac{\pi x}{120}\right) \quad (20)$$

Solução numérica: na obtenção da resolução numérica, utiliza-se o método das diferenças finitas para discretizar e equação diferencial no intervalo $[0, 60]$ onde o problema proposto se aplica. Aplica-se o MDF ao PVC em (17) para determinar um sistema de equações algébricas lineares. Inicialmente, a derivada de segunda ordem é substituída pela aproximação de diferença centrada de segunda ordem, equação (15), para obter,

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = \frac{w_0 h^2}{T_0} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x_i}{2L}\right) \right], \quad i = 2, \dots, n-2 \quad (21)$$

em que n é a quantidade de pontos da malha computacional e i é o índice que varia de 1 até n para percorrer estes pontos. A equação (21) é aplicada em pontos interiores da malha, nos extremos da malha devem ser considerados os valores de contorno. O extremo esquerdo da malha tem valor $x = 0$ com índice $i = 1$, neste ponto o valor de contorno é $y'(0) = 0$. Fazendo a aproximação pela diferença centrada de primeira ordem, equação (12), tem-se,

$$y_{i-1} = y_{i+1} \quad (22)$$

Substitui-se (22) em (21) para eliminar o termo y_{i-1} , pois $i - 1$ está fora da malha computacional. Dessa forma, obtém-se,

$$2y_{i+1} - 2y_i = \frac{w_0 h^2}{T_0} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x_i}{2L}\right) \right], \quad i = 1 \quad (23)$$

No extremo direito da malha é o valor $x = 60$ com índice $i = n - 1$ e valor de contorno $y(60) = 15$ ou $y_n = 15$. Fazendo a substituição em (30), tem-se,

$$2y_{n-1} - y_{n-2} = 15 - \frac{w_0 h^2}{T_0} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x_{n-1}}{2L}\right) \right], \quad i = n - 1 \quad (24)$$

Os valores aproximados de $y(x)$ pelo MDF são determinados pelo sistema linear formado pelas equações (21), (23) e (24),

$$\begin{cases} 2y_{i+1} - 2y_i = \frac{w_0 h^2}{T_0} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x_i}{2L}\right) \right], & i = 1 \\ y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = \frac{w_0 h^2}{T_0} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x_i}{2L}\right) \right], & i = 2, \dots, n-2 \\ 2y_{n-1} - y_{n-2} = 15 - \frac{w_0 h^2}{T_0} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x_{n-1}}{2L}\right) \right], & i = n-1 \end{cases} \quad (25)$$

Foram realizadas simulações computacionais com quatro diferentes valores para o espaçamento h . Inicialmente, considera-se $h = 10$ m. O número de subintervalos é determinado por $n = (b - a)/h$. Assim, $n = (60 - 0)/10 = 6$ subintervalos. O resultado numérico obtido está descrito na Tabela 1, que também apresenta a solução analítica e o erro relativo em cada ponto da malha computacional.

Tabela 1 – Resultado numérico e analítico para $h = 10$ m

i	x_i	y_i	$f(x_i)$	ER (%)
1	0	4,120637	4,031201	2,218589
2	10	4,328947	4,257626	1,675134
3	20	5,061706	5,007886	1,074718
4	30	6,419396	6,381888	0,587717

i	x_i	y_i	$f(x_i)$	ER (%)
5	40	8,488300	8,465427	0,270195
6	50	11,334628	11,324333	0,090910
7	60	15,000000	14,999990	0,000067

Fonte: Autores (2020).

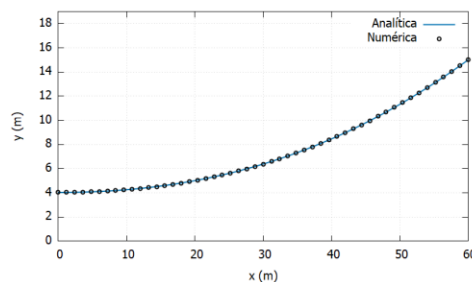
O maior erro relativo obtido na simulação com $h = 10$ m foi de 2,218589 %.

Tabela 2 – Maior erro relativo obtido na simulação de diferentes valores de h

h (m)	n	ER (%)
10	6	2,218589
2	30	0,088578
1	60	0,022149
0,6	100	0,007979

Fonte: Autores (2020).

Figura 2 - Resolução analítica e numérica para $h = 0,6$ m



Fonte: Autores (2020).

Foram utilizados os softwares livres Scilab e Gnuplot, respectivamente, na simulação computacional e construção dos gráficos das soluções analítica e numérica.

CONCLUSÕES

Com este trabalho foi possível estreitar as relações entre a teoria e a prática das EDOs e do MDF, e o método das diferenças finitas revelou-se eficaz nas aproximações das equações diferenciais ordinárias, pois estimou de forma satisfatória o resultado numérico do analítico. Diante desse estudo realizado pôde-se realmente perceber que tanto a teoria das equações diferenciais como o método das diferenças finitas têm uma aplicabilidade em várias áreas da ciência e podem facilitar muito a vida de vários pesquisadores simulando bem o comportamento da solução de problemas.

Ressalta-se que a realização dessa pesquisa se fez possível por meio deste programa, que proporciona aos acadêmicos o contato com a pesquisa científica, possibilitando o conhecimento e as informações para futuramente prosseguirem nos estudos de pós-graduação.

REFERÊNCIAS

CARGNELUTTI, J.; GALINA, V. Aplicação do Método das Diferenças Finitas em Equações Diferenciais Ordinárias. **Seminário de Extensão e Inovação da UTFPR – 5ºSEI-UTFPR**, 2015.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; E SILVA, Luiz Henry Monken. **Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. Prentice Hall, 2003.

WROBEL, Luiz C. **Métodos numéricos em recursos hídricos**. Associação Brasileira de Recursos Hídricos, 1989.

ZILL, D. G. Cullen. Equações Diferenciais. 2001.