

## Estudo do método Smoothed Particle Hydrodynamics para resolver o problema do escoamento de Poiseuille

### Smoothed Particle Hydrodynamics study to solve the Poiseuille flow problem

#### RESUMO

O método Smoothed Particle Hydrodynamics é um dos métodos numéricos baseados em partículas mais antigos desenvolvidos e estudados pela comunidade acadêmica, se estendendo para a área de hidrodinâmica computacional pela sua capacidade de simular problemas que outros métodos baseados em malha teriam dificuldade em resolver sem tratamento especial. Neste trabalho o SPH foi aplicado para o escoamento de Poiseuille entre duas placas paralelas, para verificação da precisão do método, visto que o problema possui solução analítica e é de modelagem prática.

**PALAVRAS-CHAVE:** Fluidodinâmica computacional. Solução numérica. Equações de Navier Stokes.

#### ABSTRACT

Smoothed Particle Hydrodynamics method is one of the oldest particle-based numerical methods developed and studied by the academic community, extending to the area of computational hydrodynamics due to its ability to simulate problems that other mesh-based methods would have difficulty solving without special treatment. In this work, SPH was applied to the Poiseuille flow between two parallel plates, to verify the accuracy of the method, since the problem has an analytical solution and have a practical modelling.

**KEYWORDS:** Computational Fluid Dynamics. Numerical Solution. Navier Stokes Equations.

**Eduardo Masaji Endo**  
[endo@alunos.utfpr.edu.br](mailto:endo@alunos.utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

**Adilandri Mércio Lobeiro**  
[alobeiro@utfpr.edu.br](mailto:alobeiro@utfpr.edu.br)  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil

**Recebido:** 19 ago. 2020.

**Aprovado:** 01 out. 2020.

**Direito autorial:** Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



## INTRODUÇÃO

Métodos numéricos são técnicas utilizadas para solução de problemas matemáticos por meio de repetidas operações aritméticas (interpolações), com o objetivo de encontrar resultados aproximados satisfatórios. São recorridas essas técnicas em casos de difícil ou nenhuma solução analítica, onde há a possibilidade de usar o computador para realizar as interpolações necessárias. Com o crescente desenvolvimento de computadores de melhor desempenho nos últimos anos, os métodos numéricos têm se tornado cada vez mais atrativos pela melhor capacidade de realizar operações mais rápidas (CHAPRA e CANALE, 2008).

O método Hidrodinâmica das Partículas Suavizadas, ou como mais conhecido, *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), foi desenvolvido como instrumento de estudo para problemas astrofísicos (LUCY, 1977 e GINGOLD e MONAGHAN, 1977) e estendido para a área de hidrodinâmica devido as suas particularidades decorrentes do não uso da malha e usar partículas para discretizar o domínio.

O uso da malha numérica para discretização de problemas de engenharia é de grande recorrência em métodos numéricos mais difundidos como o Método dos Volumes Finitos (MVF), Método das Diferenças Finitas (MDF) e Método dos Elementos Finitos (MEF). Malhas numéricas são compostos de arestas e nós que representam o domínio de um sistema. Dentre as desvantagens das malhas há o grande custo computacional para gerá-las e dificuldade em problemas relacionados a superfície livre, fronteira deformável, interface móvel (para MDF) e deformação extremamente grande (para MEF).

Problemas que tratam de escoamento em superfície livre são ideais para o uso do SPH, uma vez que os diferentes fluidos (como água e ar) carregam propriedades que os distinguem durante toda a simulação, tornando a interface entre estes algo intrínseco do método.

Sendo um dos métodos baseados em partículas mais antigos idealizados e estudados, o SPH é vastamente utilizado na indústria digital e na comunidade científica pela precisão e facilidade de modelagem.

## MATERIAIS E MÉTODOS

O método SPH é utilizado na fluidodinâmica computacional para calcular as soluções das equações governantes que regem o escoamento de um fluido (equações de Navier-Stokes) de forma numérica, uma vez que estas são classificadas como equações diferenciais parciais (EDPs) e que não possuem solução analítica na maioria das situações.

Liu e Liu (2003) descreveram em seu trabalho, as etapas chave para o desenvolvimento do SPH:

- a) o domínio do problema (fluido e estrutura) é discretizado na forma de partículas;
- b) o método de representação integral é empregado para aproximação das funções de campo. Segundo Monaghan (1992), a seguinte equação serve como representação de qualquer função de campo:

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') \cdot W(x - x', h) dx' \quad (1)$$

onde a integração é realizada em todo o domínio do problema,  $W$  é a função de suavização, que é uma aproximação da função delta de Dirac,  $x$  e  $x'$  representam uma posição qualquer dentro do fluido e os pontos dentro da zona de influência definidas por  $W$ , respectivamente,  $dx'$  é um volume infinitesimal e  $h$  é o comprimento de suavização utilizado para aumentar a zona de influência de  $W$ ;

c) a aproximação pelo núcleo é discretizada, trocando a representação por integral por uma representação por somatória para as funções de campo

$$f(x_i) \cong \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) \cdot W(x_i - w_j, h) \quad (2)$$

onde  $x_i$  e  $x_j$  são equivalentes à  $x$  e  $x'$ , respectivamente;

- d) as funções de campo são evoluídas a cada passo de tempo;
- e) as funções de campo que aparecem nas EDPs são substituídas pelos valores da aproximação por partículas, gerando um conjunto de equações diferenciais ordinárias EDOs com respeito apenas ao tempo;
- f) as EDOs são resolvidas com algum método numérico de integração temporal (Runge-Kutta, Euler, *leapfrog*, Verlet e etc), obtendo a velocidade e posição de cada partícula em cada instante de tempo.

A função de suavização é de grande importância para o SPH, pois esta influencia diretamente na precisão dos resultados, determinando a quantidade de partículas e em que intensidade que influenciarão cada iteração. Qualquer função pode desempenhar o papel de função de suavização desde que sejam satisfeitos os critérios básicos, estes determinam que a mesma deve ser unitária, possuir suporte compacto, ser positiva, seu módulo ser inversamente proporcional à distância, ser uma função par e ser suficientemente suave.

Como mencionado anteriormente, as equações de Navier-Stokes não possuem solução analítica na maioria dos casos, porém, em situações especiais é possível obtê-la através de simplificações físicas, como no caso do escoamento de Poiseuille que será utilizado nesse trabalho, onde o fluido é considerado incompressível, com escoamento entre placas paralelas fixas e não escorregadias e em regime permanente (FOX et al., 2006).

Como mostrado em Galina et al. (2017), as soluções para as velocidades nas direções  $x$  e  $y$  para a equação de conservação de momento deste problema é dado respectivamente por:

$$u_x(x, y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (L_y y - y^2), \quad u_y(x, y) = 0 \quad (3)$$

onde  $p$  é a pressão,  $\partial p / \partial x$  é a variação da pressão,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica dada por  $\mu = \rho \nu$ ,  $\rho$  é a densidade,  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $L_y$  é a largura do canal.

Para comparação com o método numérico, será utilizado o DualSPHysics, que é um conjunto de códigos em C++, CUDA e Java que são abertos para estudo (CRESPO et al., 2011). A forma SPH da equação de conservação de momento adotada pelo software é a mesma proposta por Monaghan (1992), onde:

$$\frac{dv_a}{dt} = -\sum_b \left( \frac{P_b + P_a}{\rho_b \rho_a} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab} + g \quad (4)$$

onde a e b são referentes às partículas,  $\Pi_{ab}$  é o termo de viscosidade utilizado para garantir estabilidade numérica e prevenir a penetração de partículas (Monaghan, 1989).

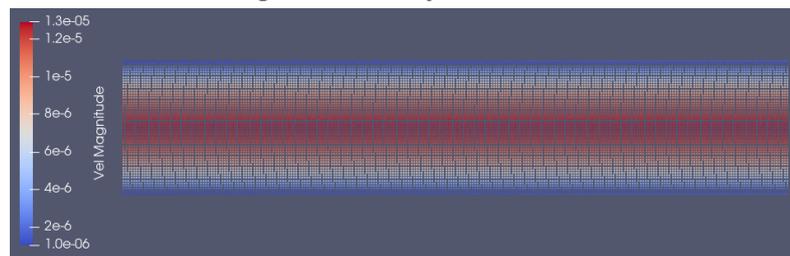
## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para aplicação do problema, serão adotados os seguintes parâmetros à solução analítica para comparação da solução numérica:  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $L_y = 0,001 \text{ m}$  e  $u_{\text{máx}} = 1,277 \text{ m/s}$ , onde este ocorre sempre em  $y = L_y/2$ .

Para modelagem no dualSPHysics, a distância entre partículas adotada foi de 0,00002 m, função de suavização de Wendland (WENDLAND, 1995), tratamento para viscosidade de Laminar + SPS e condição de fronteira dinâmica na extremidade horizontal. A quantidade de partículas geradas no total foram de 13056 e para uma simulação de 0,5 s, em um computador de 3,10 GHz e 6,0 GB de memória RAM, o tempo de processamento durou 1220 s. A simulação visualizada no Paraview é mostrada na Figura 1.

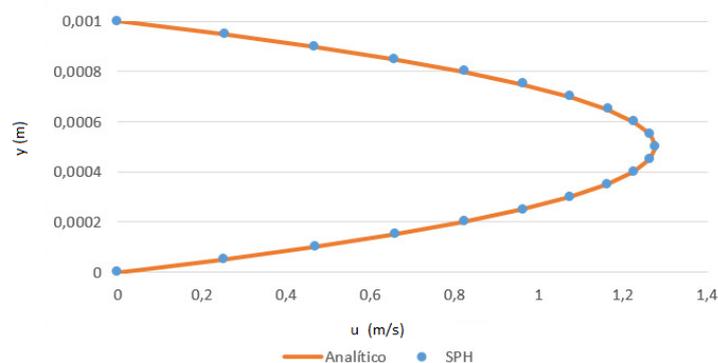
A Figura 2 mostra a comparação entre ambas soluções, onde o maior erro relativo do problema foi encontrado adjacente às placas, com 4,4%.

Figura 1 – Simulação numérica



Fonte: Paraview.

Figura 2 – Comparação de perfil de velocidade entre métodos



Fonte: MeasureTool do dualSPHysics e Excel.

## CONCLUSÕES

O escoamento de Poiseuille é um exemplo de fácil modelagem e comparação por ser de geometria simples e possuir solução analítica, sendo um problema

muito utilizado para validação de código e calibração de parâmetros. Para tentar melhorar os resultados do erro relativo de 4,4%, pode-se utilizar outro tratamento para viscosidade, função de suavização, condição de fronteira ou discretizar mais o domínio.

### AGRADECIMENTOS

Agradeço a Universidade Tecnológica Federal do Paraná-UTFPR CM pela oportunidade em ser acadêmico da instituição e em desenvolver o projeto de pesquisa de iniciação científica, agradeço também ao PIBIC-CNPq pelo suporte financeiro para o desenvolvimento do estudo.

### REFERÊNCIAS

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos numéricos para engenharia**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2008.

LUCY, L. B. **A numerical approach to the testing of the fission hypothesis**. The astronomical journal, v. 82, p. 1013-1024, 1977.

GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. **Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars**. Monthly notices of the royal astronomical society, Oxford University Press Oxford, UK, v. 181, n. 3, p. 375–389, 1977.

LIU, G.; LIU, Moubin B. **Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method**. World Scientific, 2003.

MONAGHAN, J. J. **Smoothed particle hydrodynamics**. Annual review of astronomy and astrophysics, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 30, n. 1, p. 543–574, 1992.

FOX, Robert W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, Philip J. **Mecânica dos Fluidos-6ª edição**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Galina, V., Cargnelutti, J., Kaviski, E., Gramani, L. M., & Lobeiro, A. M. **Simulação de escoamento de água em canal entre placas paralelas utilizando o método do reticulado de Boltzmann**. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 5, n. 1, 2017.

CRESPO, A. et al. **User guide for dualsphysics code**. University of Vigo, The University of Manchester and Johns Hopkins University, 2011.

MONAGHAN, J. J. **Smoothed particle hydrodynamics**. Annual review of astronomy and astrophysics, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 30, n. 1, p. 543–574, 1992.

MONAGHAN, J. **On the problem of penetration in particle methods.** Journal of Computational physics, v. 82, p. 1–15, 1989.

WENDLAND, H. **Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree.** Advances in computational Mathematics, Springer, v. 4, n. 1, p. 389–396, 1995.