

Um modelo matemático para o adensamento de solos saturados

A mathematical model for the consolidation of saturated soils

RESUMO

Joabby da Costa Biz
joabby@alunos.utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Maurício do Espírito Santo Andrade
mauricioandrade@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

Elmagno Catarino Santos Silva
elmagnosilva@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil

As camadas argilosas saturadas submetidas a um carregamento vertical sofrem deformações verticais ao longo do tempo, isto é, adensamento. Essas deformações quando acentuadas provocam danos estruturais, funcionais ou estéticos nas edificações. Nesse sentido, um modelo matemático é desenvolvido para a previsão do adensamento das argilas saturadas levando-se em conta os conceitos da mecânica dos solos. A formulação matemática considera a existência de uma parcela viscosa da tensão efetiva vertical e incorpora na equação diferencial parcial (EDP) modelada uma lei de viscosidade não linear como uma propriedade fundamental. A EDP do adensamento é obtida em termos de dissipação do excesso de poropressão normalizada. Em vista da complexidade do modelo, o método das diferenças finitas (MDF) é utilizado para a obtenção da solução teórica considerando variação no tempo e no espaço. A solução numérica mostra que a parcela viscosa da tensão efetiva vertical atua retardando o fenômeno do adensamento. Além disso, o ajuste dos valores teóricos aos experimentais mostra que a modelagem para o fator viscosidade igual a um é promissora.

PALAVRAS-CHAVE: Modelo Matemático. Viscosidade. Adensamento.

ABSTRACT

Recebido:

Aprovado:

Direito autorial: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



The saturated clayey layers subjected to a vertical loading undergoes vertical deformations over time, that is, consolidation. These deformations when accentuated cause structural, functional or aesthetics damages in the building. In this sense, a mathematical model is developed to predict the consolidation of saturated clays taking into account the concepts of soil mechanics. The mathematical model considers the existence of a viscous portion of the vertical effective stress and incorporated in the modeled partial differential equation a nonlinear viscosity law as a fundamental property. This consolidation equation is obtained in terms of dissipating excess normalized pore pressure. In view of the complexity of the model, the finite difference method (MDF) is used to obtain the theoretical solution considering variation in time and space. The numerical solution shows that a viscous portion of the effective vertical stress acts by delaying the consolidation phenomenon. In addition, the adjustment of theoretical to experimental values shows that the modeling for the viscosity factor equal to one is promising.

KEYWORDS: Mathematical Model. Viscosity. Consolidation.

INTRODUÇÃO

Problemas que envolvem o adensamento dos solos podem ser representados por equações diferenciais parciais (EDPs), mais precisamente do tipo calor (parabólica). Estas equações permitem avaliar, com base em dados presentes, o comportamento futuro de diversos problemas. Entretanto, a modelagem de alguns problemas pode resultar em EDPs complexas cuja solução não pode ser obtida por métodos analíticos.

A teoria original para o adensamento unidimensional foi proposta por Terzaghi e Frohlich (1936) sendo a teoria em uso geral (BRAJA, 2010). Contudo, uma série de experimentos consistentemente observados indica que a teoria proposta por Terzaghi e Frohlich (1936) é simplificada demais, não levando em conta fatores indispensáveis como a resistência viscosa. Essa abordagem simplista conduz a resultados teóricos que não são observados experimentalmente.

O objetivo desse trabalho é analisar um modelo matemático desenvolvido para o adensamento unidimensional de solos argilosos saturados, no qual é considerada uma lei de viscosidade não linear do tipo sugerida por Barden (1965).

MATERIAIS E MÉTODOS

Considerar-se-á, para o desenvolvimento do modelo matemático, uma camada de solo argiloso saturado de espessura $2H_d$ e duplamente drenada devido à presença de camadas arenosas no seu topo e na sua base. Além disso, um carregamento vertical ($\Delta\sigma_v$) é aplicado na superfície do solo arenoso gerando, na camada intermediária argilosa, um excesso de poropressão (u). Essa pressão de água em excesso será dissipada ao longo do tempo caracterizando o fenômeno do adensamento. Desse modo, no modelo matemático a ser desenvolvido tomou-se como simplificação inicial as seguintes idéias:

Hipótese (I): O solo é homogêneo e saturado.

Hipótese (II): As partículas sólidas e a água são incompressíveis.

Hipótese (III): As deformações são infinitesimais.

Hipótese (IV): Admite-se válida a Lei de Darcy.

Hipótese (V): Admite-se que o fluxo de água e a compressão são unidimensionais (direção z).

Assim, tomando-se na camada argilosa um elemento cúbico infinitesimal dV de solo e definimos v_z , como velocidade de fluxo de entrada na direção z , obtém-se para a variação de volume de um elemento de solo de volume $V=dx dy dz$ na unidade de tempo t :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left(k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) dx dy dz \Leftrightarrow \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{1}{1+e_1} \left(\frac{\partial e(z,t)}{\partial t} \right) = \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} \quad (1)$$

onde,

$\partial \varepsilon_v$: deformação volumétrica específica (vertical); e_1 : índice de vazios inicial (constante); γ_w : peso específico da água; e : índice de vazios; u : excesso de poropressão; k_z : coeficiente de permeabilidade; $H = 2H_d + h_a + u/\gamma_w$: carga hidráulica total; h_a : altura do nível d'água na camada arenosa do topo.

Hipótese (VI): O coeficiente de compressibilidade sólido-sólido (a_{vs}) é definido como:

$$a_{vs} = -\frac{\Delta e}{\Delta \sigma'_{vs}} \quad (2)$$

Hipótese (VII): A tensão efetiva vertical é composta por duas parcelas : uma viscosa ($\sigma'_{v\eta}$) e uma parcela sólido-sólido (σ'_{vs}), desse modo (2) torna-se:

$$e(z,t) = e_2 - a_{vs} [(\Delta \sigma_v - u(z,t)) - \sigma'_{v\eta}(z,t)] \quad (3)$$

onde e_2 : índice de vazios final.

Hipótese (VIII): $\sigma'_{v\eta}(z,t)$ é dada por uma lei de viscosidade não linear sugerida por Barden (1965).

$$\sigma'_{v\eta}(z,t) = -\bar{\eta} \left(\frac{\partial e}{\partial t} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (4)$$

Onde, $\bar{\eta}$: coeficiente médio de viscosidade; n : número inteiro maior que 1.

Hipótese (IX): Algumas propriedades do solo não variam durante o adensamento. Portanto, pode-se escrever:

$$c = \frac{k_z(1+e_1)}{\gamma_w} \quad (5)$$

Assim, derivando (3) em relação ao tempo, definindo-se o excesso de poropressão normalizado $u' = u/\Delta \sigma_v$, os fatores adimensionais Fator Tempo $(T = \frac{c}{a_{vs}} \frac{t}{H_d^2})$ e Fator Profundidade $(Z = \frac{z}{H_d})$ e substituindo (1), (4) e (5) na expressão obtida tem-se:

$$\left[\bar{\eta} a_{vs} c^{\frac{1-n}{n}} \Delta \sigma_v^{\frac{1-n}{n}} \right] \left(\frac{\partial^3 u'}{(H_d^4 \frac{a_{vs}}{c}) \partial Z^2 \partial T} \right)^{1/n} + \frac{\partial^2 u'}{H_d^2 \partial Z^2} - \frac{1}{H_d^2} \frac{\partial u'}{\partial T} = 0 \quad (6)$$

As condições de contorno do problema são assim definidas:

$$Z=0: u'(0,T)=0 \text{ e } Z=2: u'(2,T)=0$$

$$\text{e a condição inicial: } T=0: u'(Z,0)=1$$

A equação (6) juntamente com as condições de contorno e inicial fornece o problema de valor de contorno (PVC) a ser resolvido. O método das diferenças finitas (MDF) foi utilizado para fornecer a solução do problema. No referido método, optou-se por substituir as derivadas parciais por aproximações do tipo centrada para o espaço e progressiva no tempo.

Em (6), um novo parâmetro adimensional Fator Viscosidade (V) pode ser definido:

$$V = \left[\frac{\bar{\eta} a_{vs} c^{\frac{1-n}{n}} \Delta \sigma_v^{\frac{1-n}{n}}}{(H_d^4 \frac{a_{vs}}{c})^{1/n}} \right] H_d^2 \quad (7)$$

RESULTADOS E DISCUSSÕES

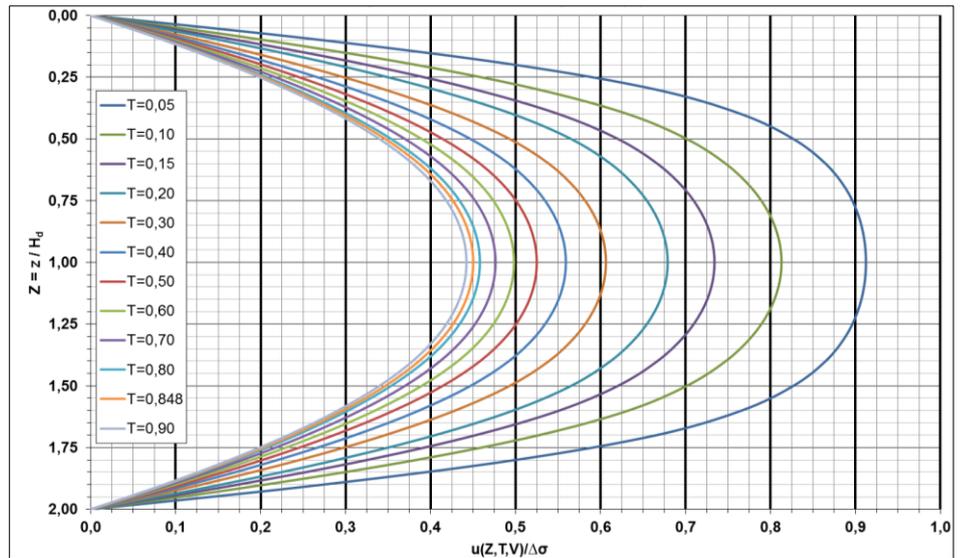
A EDP (6) descreve matematicamente a saída de água dos vazios de um solo argiloso saturado. A equação por apenas apresentar Fatores Adimensionais é geral e serve para qualquer tipo de solo argiloso. Como forma de verificação do correto desenvolvimento da referida equação, deve-se entender que ela é mais completa do que as Teorias de Terzaghi e Frohlich (1936) e Andrade (2014). Desse modo, particularizando a referida equação deve-se obter àquelas descritas nas Teorias citadas. Se em (6) tomar-se $\bar{\eta}=0 \rightarrow V=0$ obtém-se a conhecida EDP do calor da Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936) cuja solução analítica é conhecida e apresentada no curso básico de Mecânica dos Solos. Já tomando-se em (6) $n=1$ obtém-se a EDP linear apresentada e resolvida analiticamente por Andrade (2014).

Para u' fixou-se o valor do Fator Viscosidade V e para cada T observou-se o comportamento da referida função com o Z , ou seja, ao longo da camada. As curvas construídas, por representarem a evolução da dissipação do u' com o tempo, são denominadas isócronas. A figura 1 apresenta as isócronas para $n=5$ e $V=1$. A escolha do referido valor de n se deve a Barden (1965). O Fator $V=1$ buscou ampliar os efeitos viscosos para o estudo do comportamento do solo.

Ainda em relação à figura 1 u' é sempre igual a 1 (um) para $T=0$. Essa hipótese está de acordo com a Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936), no entanto, resultados experimentais recentes obtidos por Martins (1990) mostram que essa suposição não é verdadeira. Barden (1965) afirma que a maioria dos resultados de ensaios de adensamento indicam $\Delta u = \Delta \sigma_v$ para argilas saturadas independentemente da razão incremental $\Delta \sigma_v / \sigma_v$. Analisando-se ainda a referida figura, verifica-se que as isócronas tem aspecto semelhante a parábola. Observa-se também o efeito da resistência viscosa atuando no adensamento. Por exemplo, a área externa a parábola para $T=0,05$ em $V=1$ é maior do que a área externa para o mesmo T na Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936). Assim, quanto maior o V , maior a parcela viscosa resistiva disponível.

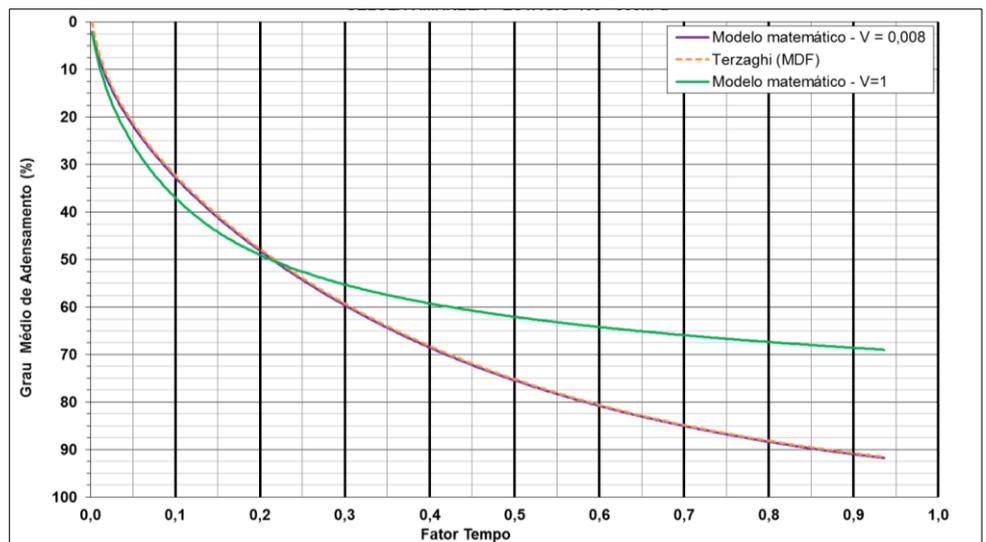
Os Graus Médios de Adensamento (\bar{U}), para um dado valor de T com $n=5$ e V iguais a 1 e 0,008, foram obtidos tomando-se uma média ponderada das isócronas $U_z \times Z$. O valor de $V=0,008$ foi escolhido tomando-se por base o trabalho de Andrade (2014). A figura 2 apresenta os valores obtidos juntamente com os Graus Médios da Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936). Observa-se que a evolução do adensamento no modelo matemático aqui desenvolvido para $V=1$ mostra-se mais acelerada no início do processo até $T \cong 0,2$. Mas em seguida, o fenômeno se desenvolve vagarosamente atingindo o "fim", não mostrado na figura, $\bar{U}=100\%$, para T bem superiores aos considerados na Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936). O modelo matemático para $V=0,008$ e a Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936) apresentam os graus médios de adensamento muito próximos. Este fato já esperado, uma vez que V adotado é próximo de zero.

Figura 1 – Isócronas – $n=5$ e $V=1$



Fonte: Autores (2020)

Figura 2 – $\bar{U} \times T$ com $n = 5$ juntamente com Terzaghi e Frolich.



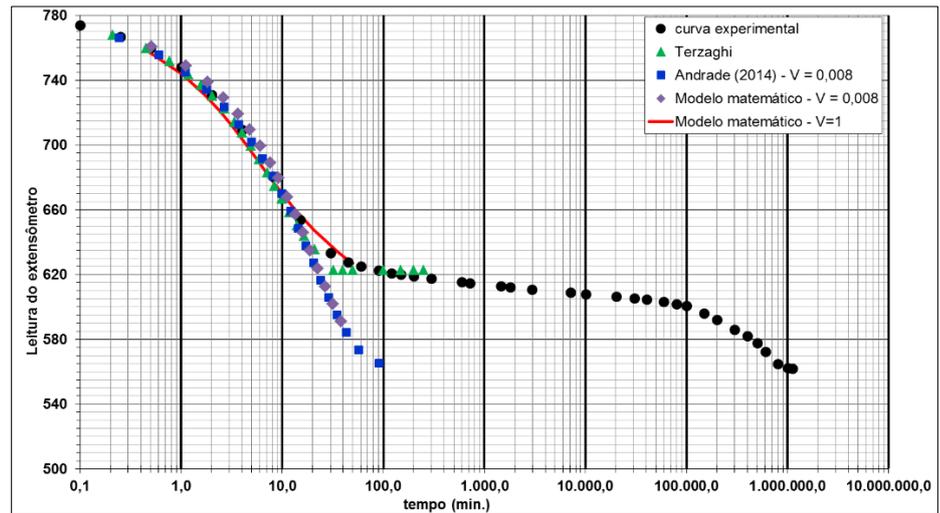
Fonte: Autores (2020)

Para o ajuste da curva teórica à experimental apresentado na figura 3, os parâmetros de adensamento a serem determinados são $\bar{\eta}$ e o coeficiente de adensamento modificado ($c_v^* = c/a_{vs}$). O valor de $\bar{\eta}$ é obtido indiretamente por meio da adequada escolha de V . O processo para ajuste da curva foi descrito por Andrade (2014) e continua sendo válido nesse modelo. Desse modo, o modelo matemático aqui adotado é verificado quanto a sua eficácia através do ajuste da curva teórica à experimental. A curva experimental do adensamento representa um estágio de incremento de tensão de 400kPa para 800kPa de um solo artificial constituído de caulim (90%) + bentonita (10%). O referido ensaio de longa duração está descrito em detalhes em Martins (1990).

Observa-se que as Teorias de Terzaghi e Frolich (1936), Andrade (2014) e o modelo desenvolvido para $V=0,008$ não foram capazes de reproduzir a “dupla

onda” observada no ensaio experimental. O não ajuste satisfatório no modelo para $V=0,008$ para a “cauda” do adensamento deve-se ao valor baixo escolhido do referido parâmetro que é muito próximo de zero. Isto significa dizer que a resistência viscosa existente é insignificante não apresentando assim a “cauda” do adensamento. Vale aqui registrar que na Teoria Linear de Terzaghi e Frohlich (1936) o V não existe.

Figura 3 – Ajuste das curvas teóricas à experimental



Fonte: Autores (2020)

Como o ajuste para $V=0,008$ não foi satisfatório decidiu-se tomar um valor de $V=1$. Os valores da leitura do extensômetro e tempo para $\bar{U} = 50\%$ de Andrade (2014) foram novamente utilizados e o valor do coeficiente de adensamento modificado recalculado. Verifica-se que a modelagem adotada mostra um ajuste satisfatório à curva experimental pelo menos para o início da cauda do adensamento. Os valores obtidos já mostram que a modelagem com $V=1$ e $n=5$ é mais promissora do que as propostas por Terzaghi e Frohlich (1936) e Andrade (2014).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo matemático desenvolvido considera a existência de uma parcela viscosa de tensão efetiva cuja lei é baseada numa proposta de Barden (1965). A EDP foi escrita de modo a incorporar os Fatores Adimensionais Profundidade (Z), Tempo (T) e Viscosidade (V), portanto, ela é geral e válida para qualquer argila saturada, sendo mais completa que as fornecidas por Terzaghi e Frohlich (1936) e Andrade (2014).

A evolução do adensamento no modelo matemático desenvolvido mostra-se mais acelerado no início do processo. Mas em seguida, o fenômeno se desenvolve vagarosamente, atingindo o “fim” para Fatores Tempo (ou tempos) bem superiores aos considerados na Teoria de Terzaghi e Frohlich (1936). A parcela viscosa atua retardando o processo de adensamento.

O ajuste dos valores teóricos aos experimentais mostra que a modelagem de $V=1$ e $n=5$ é mais promissora que as propostas de Terzaghi e Frohlich (1936) e Andrade (2014).

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, M. E. S. **O Adensamento unidimensional considerando a resistência viscosa à compressão**. 2014. 198f. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE), Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2014.
- BARDEN, L. **Consolidation of Clay With Non-Linear Viscosity**. Géotechnique, vol. 15, Issue 4, December, pp.345-362.
- BRAJA, M. **Fundamentos de Engenharia Geotécnica**. Tradução da 6ª edição norte americana. Thomson, 2010.
- CASAGRANDE, A. **The Determination of The Pre-Consolidation Load and Its Pratical Significance**. In: Proceeding of First International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Vol. 3. Discussion. D-34. Cambridge, Massachusetts.
- MARTINS, I. S.M.1990. **Relatório de Pesquisa**. Rio de Janeiro (não publicado).
- TAYLOR, D. W. 1942. **Research on Consolidation of Clays**. Pub Massachusetts Institute of Technology, Department of Civil and Sanitary Engineering. Serial n. 82, 147 pp.
- TERZAGHI, K; FROHLICH, O.K. 1936. **Theorie der setzung von tonschichten**. Franz Deuticke. Vienna: (tradução para o francês – Thórie des tassements des couches argileuses. Dunod – 1939. Paris).