

Transferência de calor em malhas generalizadas: verificação e aplicação

Heat transfer in generalized mesh: verification and application

RESUMO

O presente trabalho obteve a solução numérica da equação de difusão do calor em coordenadas generalizadas. A resolução deste modelo matemático foi obtida por meio do método de volumes finitos que, posteriormente, foi verificada pela equação analítica e com o auxílio de um programa comercial. Foi realizado também duas aplicações em geometrias não retangulares. Pode-se observar que os resultados obtidos na verificação estão de acordo com a solução analítica e com o aplicativo comercial.

PALAVRAS-CHAVE: Condução. Convecção. Volumes Finitos.

ABSTRACT

The present work solved numerically the heat diffusion equation in generalized mesh. The solution of this mathematic model was obtained by finite volume method, further was verified using analytic equation and a commercial app. The algorithm calculated heat transfer in two different non-rectangular geometries. It is observed that the data obtained in the present work are accordingly with analytical solution and commercial app.

KEYWORDS: Conduction. Convection. Finite Volume.

Matheus Miranda Guimarães do Nascimento
matheusmgn@hotmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Gisely Luzia Ströher
gisely@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Gylles Ricardo Ströher
gylles@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil

Recebido: 19 ago. 2020.

Aprovado: 01 out. 2020.

Direito autoral: Este trabalho está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.



INTRODUÇÃO

Fenômenos de transporte é a área da ciência que estuda sistemas em desequilíbrio, ou seja, sistemas nos quais ocorre uma distribuição não uniforme da grandeza intensiva de interesse, o que provoca um fluxo da grandeza extensiva correspondente, cuja tendência é restabelecer o equilíbrio do sistema. (FARIAS, 2011)

Um exemplo de fenômeno de transporte é a transferência de calor que pode ocorrer por meio de três mecanismos: difusão, convecção e radiação. A difusão de calor, de acordo com Bi (2018), é a transferência de energia interna pelas colisões de partículas microscópicas e o movimento dos elétrons dentro de um corpo. Tais partículas podem ser moléculas, átomos e elétrons.

De acordo com Bejan (2013), a convecção derivada do verbo em Latim *convecto-are* o que significa reunir ou carregar para um local é o estudo da transferência de calor sob efeito do escoamento de um fluido.

A radiação térmica é a energia emitida pela matéria que se encontra a uma temperatura não nula sendo ela transmitida não apenas em superfícies sólidas, mas em gases e líquidos. (INCROPERA *et al.*, 2000)

A equação que descreve o fenômeno de difusão de calor possui soluções analíticas para geometrias mais simples como paredes e cilindros. No entanto, para geometrias mais complexas não é factível o uso de soluções analíticas e também de sistemas de coordenadas convencionais, alternativamente, recorre-se ao uso de um novo sistema de coordenadas computacional denominadas coordenadas generalizadas ou arbitrárias e em conjunto com uma técnica numérica de solução de equações diferenciais parciais.

De acordo com Maliska (2017), em meados da década de 1970, os sistemas coordenados ortogonais convencionais começaram a ceder espaço para os sistemas coordenados generalizados coincidentes com a fronteira do domínio, e o método dos volumes finitos (MVF) passou a resolver problemas em geometrias irregulares.

Isso se deve ao fato de que o MVF é robusto devido a sua característica conservativa, ou seja, a quantidade de energia seja ela mássica, calórica ou momento permanece conservada na escala local. Além de que os fluxos de volumes adjacentes são diretamente balanceados. (KOLDITZ, 2002)

Neste contexto, conhecendo a limitações dos diferentes sistemas de coordenadas para descrever diversas geometrias, o presente trabalho tem como objetivo utilizar a equação de difusão de calor em coordenadas generalizadas, discretizadas por meio do método de volumes finitos em sua formulação totalmente implícita, com condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin verificados por meio da equação analítica e do programa comercial, respectivamente.

MATERIAIS E MÉTODOS

A implementação do código e os resultados apresentados no presente trabalho foram obtidos com um notebook com processador Intel® Core™ i5,

memória RAM de 8 GB, sistema operacional Windows 10 Home Single Language de 64 bits.

A equação da difusão do calor em coordenadas cartesianas é dada por:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{S} \quad (1)$$

As considerações utilizadas no presente trabalho são regime não permanente em duas dimensões (x,y). Logo, a Equação 1 em coordenadas generalizadas dado por Delgado (2012) é dada pela Equação 2:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho C_p T}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\alpha_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \alpha_{12} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) kJ \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\alpha_{21} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \alpha_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) kJ \right] + \frac{\dot{S}}{J} \quad (2)$$

Em que ξ e η são as novas coordenadas do sistema, J é o jacobiano representado pela Equação 3 e os termos α_{ij} são coeficientes da equação descritos pelas Equações 4 a 6.

$$J = (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) = (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)^{-1} \quad (3)$$

$$\alpha_{11} = J^{-2} (\xi_x^2 + \xi_y^2) \quad (4)$$

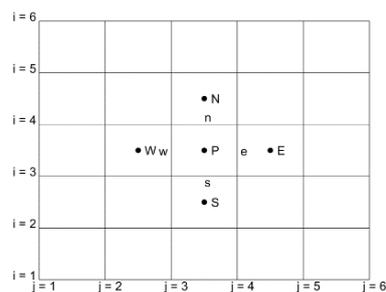
$$\alpha_{21} = J^{-2} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \quad (5)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = J^{-2} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \quad (6)$$

Em que (x,y) e (ξ,η) representam as coordenadas cartesianas e generalizadas respectivamente além de que x_ξ representa a coordenada x derivada em função da coordenada ξ e assim para cada outra variável.

A Figura 1 representa a malha computacional com o volume de controle definido em torno do ponto P para a aplicação do MVF. Sendo os pontos W, E, N e S os pontos vizinhos ao P. Por outro lado, os pontos w, e, n, s são os pontos de fronteira do volume de controle adotado.

Figura 1 – Volume de Controle



Fonte: Autoria Própria (2020)

Após integrar a Equação 2, resolver e adotar a sua forma totalmente implícita obtém-se a Equação 7:

$$A_p T_p = A_e T_E + A_w T_W + A_n T_N + A_s T_S + A_{ne} T_{NE} + A_{nw} T_{NW} + A_{sw} T_{SW} + A_{se} T_{SE} + B \quad (7)$$

Devido ao tamanho limitado de páginas optou-se por omitir os coeficientes as equações dos coeficientes acima, porém eles podem ser encontrados em Maliska

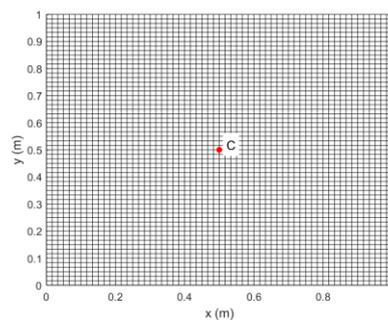
(2017). O sistema linear formado por tal equação foi resolvido utilizando o método de Gauss-Seidel, implementado pelos autores do presente trabalho.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

As condições de contorno adotadas na validação do algoritmo desenvolvido no presente trabalho são 0 °C para as regiões norte, sul, leste e oeste. Temperatura inicial de 50 °C. As propriedades utilizadas foram: $k = 300 \text{ W/(mK)}$, $C_p = 1.000 \text{ J/(kgK)}$, $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$, $\tau = 80 \text{ s}$, $\Delta\tau = 0,01 \text{ s}$ e critério de convergência de 1×10^{-5} .

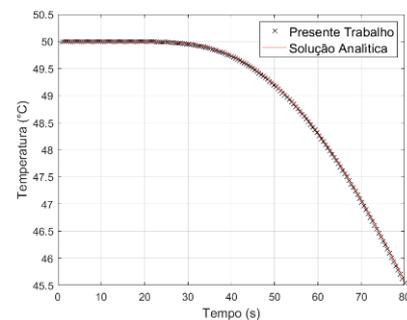
Com as condições de contorno, inicial e propriedades definidas simulou-se o algoritmo para uma geometria retangular de 1x1 metro com malha de 60x60. A Figura 2 representa a malha utilizada no estudo da condução de calor e a Figura 3 ilustra a comparação entre a solução analítica e numérica no centro da geometria retangular (Ponto C).

Figura 2 – Malha ortogonal de 60x60 pontos



Fonte: Autoria Própria (2020)

Figura 3 - Comparação solução analítica com numérica no ponto C da geometria

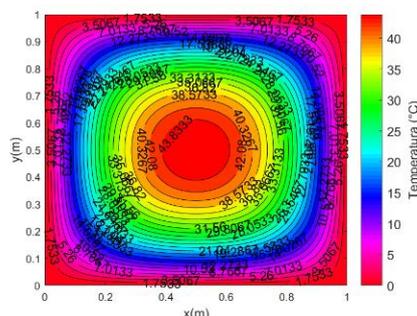


Fonte: Autoria Própria (2020)

Observa-se que a solução numérica desenvolvida no presente trabalho tem um comportamento muito próximo à solução analítica. Observou-se que a maior diferença nos resultados foi de 0,0082 °C, cerca de 0,018%.

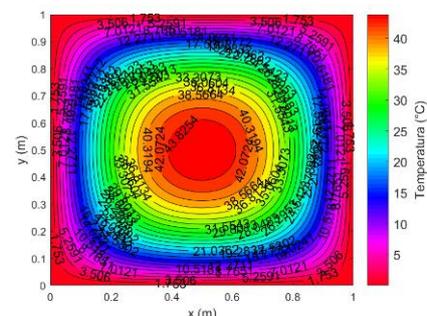
As Figuras 4 e 5 representam a distribuição de temperatura da solução analítica e numérica em toda a geometria estudada.

Figura 4 – Distribuição de temperatura solução analítica



Fonte: Autoria Própria (2020)

Figura 5 – Distribuição de temperatura solução numérica



Fonte: Autoria Própria (2020)

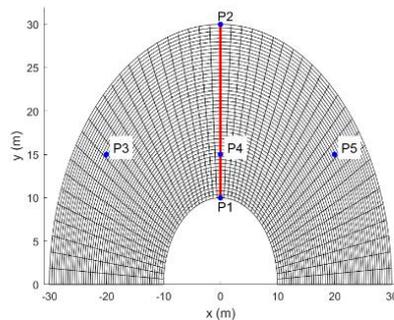
Observa-se, também, que há uma boa concordância de resultados em toda a geometria utilizada na distribuição de temperatura. A maior diferença de

temperatura foi de 0,0246 °C indicando, mais uma vez, que o algoritmo desenvolvido no presente trabalho mostrou um bom desempenho.

As Figuras 2 a 5 indicam que para a condição de Dirichlet o algoritmo desenvolvido pode ser aplicável. Então, para verificar as outras condições de contorno comparou-se os resultados obtidos com a condição de contorno de Robin com um programa comercial. Assim, os resultados ilustrados nas Figuras 6 a 9 mostram tal comparação.

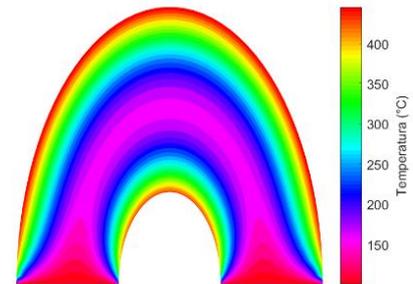
As condições de contorno utilizadas para a simulação de transferência de calor são: temperatura inicial igual a 20 °C, temperaturas nas arestas norte e sul equivalentes a 100 °C. Nas arestas leste e oeste adotou-se um coeficiente de convecção (h) de 1 W/m²K com uma temperatura ambiente igual a 500 °C. Adotou-se um valor para a difusividade térmica (α) igual a 0,1 m²/s, critério de parada de resolução do sistema linear de 1x10⁻⁵ e condutividade térmica de 1 W/mK.

Figura 6 – Malha não ortogonal



Fonte: Autoria Própria (2020)

Figura 7 – Distribuição de Temperatura em 100 s para a condição de Robin

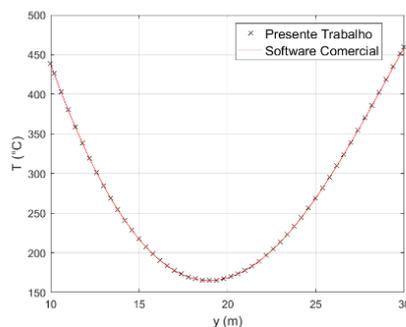


Fonte: Autoria Própria (2020)

Uma indicação que o algoritmo foi implementado de maneira correta é que as temperaturas máximas e mínimas estão de acordo com as condições de contorno, uma vez que norte e sul possuem temperaturas constantes e as temperaturas nas fronteiras leste e oeste não podem ultrapassar 500 °C.

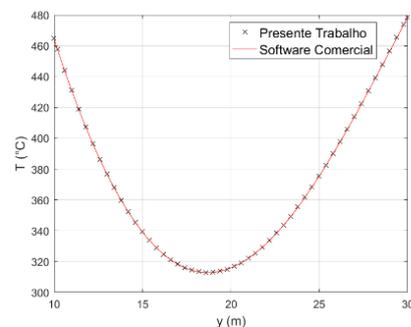
As Figuras 8 e 9 ilustram a comparação entre os pontos P1 e P2 ilustrados na Figura 6 com a solução do presente trabalho e a do aplicativo comercial para os instantes de 100 e 200 s, respectivamente.

Figura 8 – Comparação dos perfis de temperatura entre os pontos P1 e P2 em 100 s



Fonte: Autoria Própria (2020)

Figura 9 – Comparação dos perfis de temperatura entre os pontos P1 e P2 em 200 s

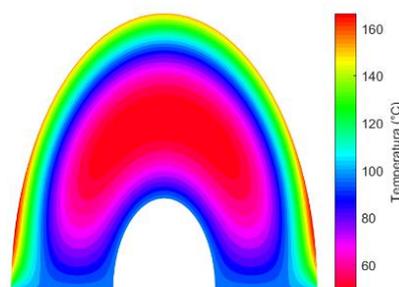


Fonte: Autoria Própria (2020)

As Figuras 8 e 9 mostram que os dados obtidos por meio algoritmo desenvolvido no presente trabalho estão em conformidade com o apresentado pelo programa comercial indicando mais uma vez que o código implementado está correto.

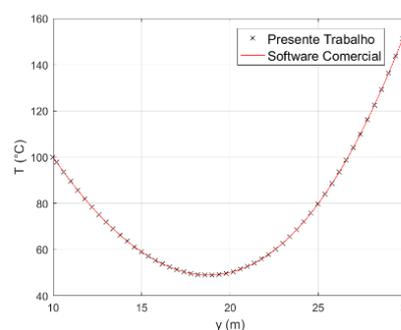
A fim de verificar exaustivamente o código implementado, utilizou-se as mesmas propriedades descritas no caso anterior, alterando apenas as condições de contorno, para as regiões norte, sul e oeste adotou-se 100 °C e na região leste utilizou-se $q'' = 20 \text{ W/m}^2$. As Figuras 10 e 11 ilustram a distribuição de calor na geometria representada pela Figura 6 e a comparação com a solução comercial entre os pontos P1 e P2, respectivamente.

Figura 10 – Análise térmica com condição de contorno de Neumann



Fonte: Autoria Própria (2020)

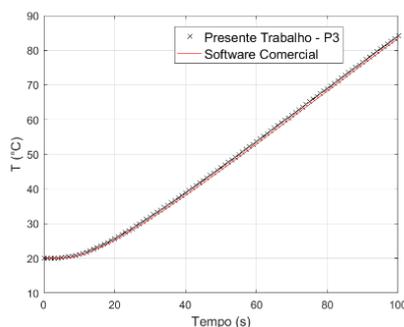
Figura 11 – Análise térmica comparativa dos pontos P1 a P2 em 100 s



Fonte: Autoria Própria (2020)

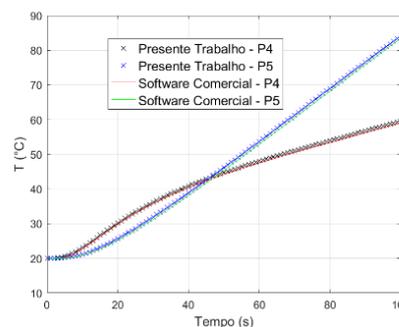
A Figura 11 mostra que os resultados do código implementado estão de acordo com o aplicativo comercial ao utilizar a condição de contorno de Neumann. O próximo passo foi escolher os pontos P3, P4 e P5 e comparar com os resultados do programa comercial, os resultados são apresentados nas Figuras 12 e 13.

Figura 12 – Comparação térmica em P3 do presente trabalho com o comercial.



Fonte: Autoria Própria (2020)

Figura 13 – Análise térmica comparativa em P4 e P5 do presente trabalho com o comercial



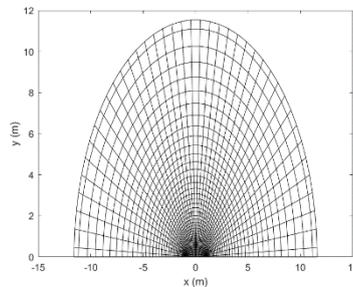
Fonte: Autoria Própria (2020)

Os perfis dados nas Figuras 12 e 13, novamente reforçam que a metodologia e a implementação numérica proposta no presente trabalho estão corretas.

É importante lembrar que o sistema de coordenadas generalizado permite trabalhar com espaçamentos não constante possibilitando o refinamento da malha e, conseqüentemente, obtendo os valores de temperaturas em mais pontos da geometria estudada.

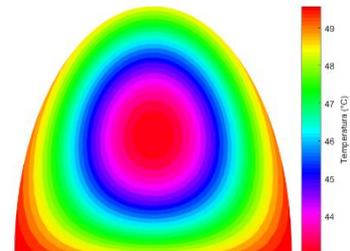
Com o algoritmo validado para as três condições de contorno, aplicou-as para obter distribuição térmica de diferentes malhas, como pode-se visualizar nas Figuras 14 a 17.

Figura 14 – Malha não ortogonal



Fonte: Autoria Própria (2020)

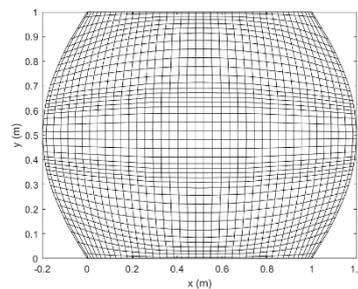
Figura 15 – Distribuição de temperatura



Fonte: Autoria Própria (2020)

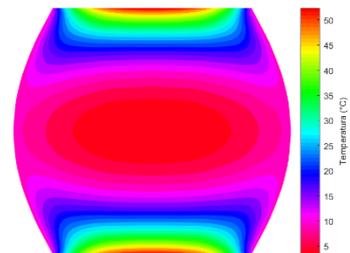
Utilizando as mesmas propriedades descritas na validação de Neumann e Robin a distribuição térmica na Figura 15 foi com uma condição de contorno de h_{∞} e T_{∞} igual a $1 \text{ W/m}^2\text{K}$ e $50 \text{ }^{\circ}\text{C}$, respectivamente, em todas as fronteiras do sistema.

Figura 16 – Malha não ortogonal



Fonte: Autoria Própria (2020)

Figura 17 – Análise térmica



Fonte: Autoria Própria (2020)

As propriedades utilizadas na simulação da Figura 17 foram as mesmas da validação por Dirichlet com $\Delta\tau = 4 \text{ s}$, $\tau = 120 \text{ s}$. Já as condições de contorno foram de $10 \text{ }^{\circ}\text{C}$ nas regiões leste e oeste e calor constante de 90.000 W/m^2 nas regiões norte e sul.

As Figuras 14 a 17 mostram a larga aplicabilidade das coordenadas generalizadas e a flexibilidade de utilizar malhas com espaçamento não constantes, além disso uso desse sistema de coordenadas permite trabalhar com geometrias com predominância cilindra, esférica ou cartesiana.

CONCLUSÃO

No presente trabalho a equação da difusão de calor bidimensional em coordenadas generalizadas foi resolvida numericamente. Aplicou-se o método de volumes finitos em sua forma totalmente implícita e o sistema de equações obtidos fora resolvido utilizando o método de Gauss-Seidel. O algoritmo desenvolvido abrange três condições de contornos: Dirichlet, Neumann e Robin. A partir dos resultados pode se concluir que a verificação entre o algoritmo desenvolvido, a solução analítica e o comercial para as condições de contorno do primeiro ao terceiro tipo mostrou que o algoritmo obteve respostas com uma diferença máxima de $0,0246 \text{ }^{\circ}\text{C}$ o que permite o uso para diferentes simulações.

REFERÊNCIAS

BEJAN, A. **Convection heat transfer**. John wiley & sons, 2013.

BI, Z. **Finite Element Analysis Applications**. 1. ed. Elsevier, 2018. v. 1.

DELGADO, J. M. P. Q.; LIMA, A. G. B.; SILVA, M. V. **Numerical analysis of heat and mass transfer in porous media**. Berlim: Springer, 2012.

FARIAS, V. S. de O. **Difusão 3d em sólidos com forma arbitrária usando coordenadas generalizadas**. [Tese de Doutorado]. Campina Grande. Universidade Federal de Campina Grande, 2011.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2000.

KOLDITZ, O. Finite Volume Method. In: **Computational Methods in Environmental Fluid Mechanics**. Springer, Berlim, Heidelberg. 2002. https://doi.org/10.1007/978-3-662-04761-3_8

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2017.

OZISIK, M. N.; ORLANDE, H. R. B.; KASSAB, A. J. **Inverse heat transfer: fundamentals and applications**. Appl. Mech. Rev., v. 55, n. 1, 2002.

PATANKAR, S. **Numerical heat transfer and fluid flow**. New York: CRC press, 2018.